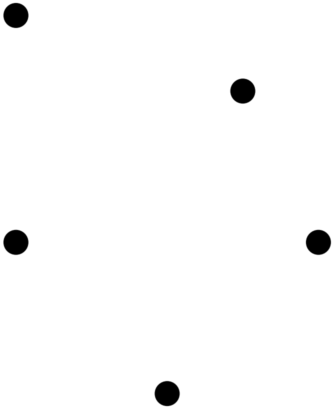
Nombre chromatique et sous-graphes induits
(Partie 1)

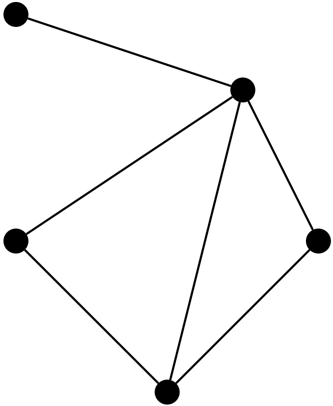
Marthe Bonamy et Irena Penev

8 juin 2020

Graphes

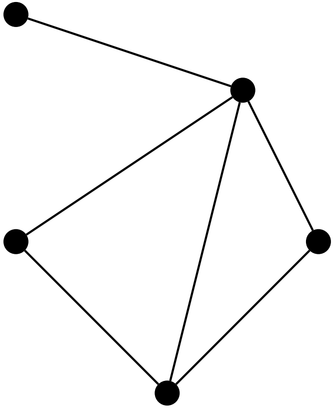


Graphes



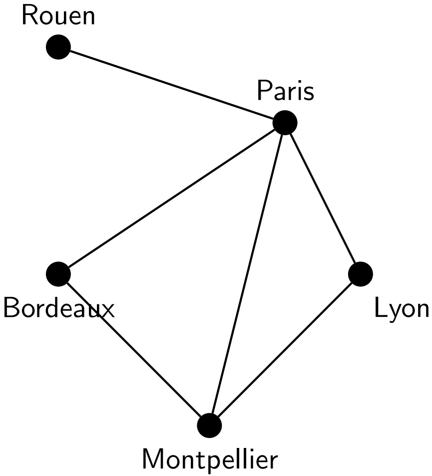
Graphes

Réseau de trains.



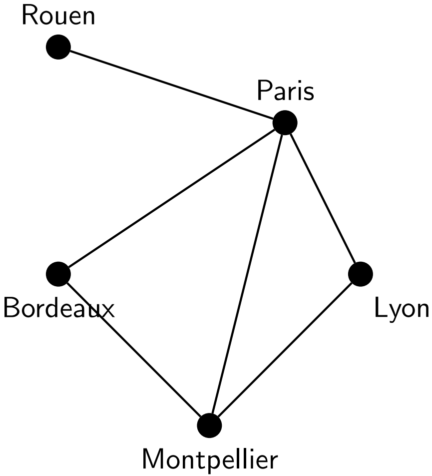
Graphes

Réseau de trains.



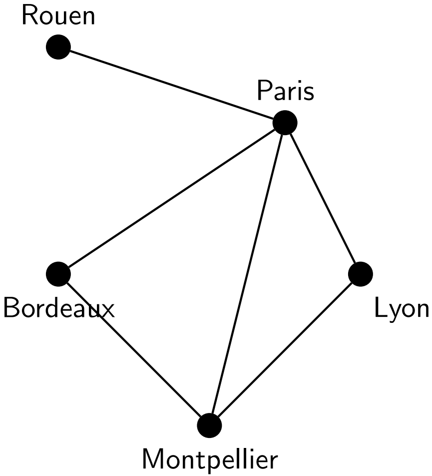
Graphes

Réseau de trains. $\rightsquigarrow$ Représenter n'importe quelles contraintes.



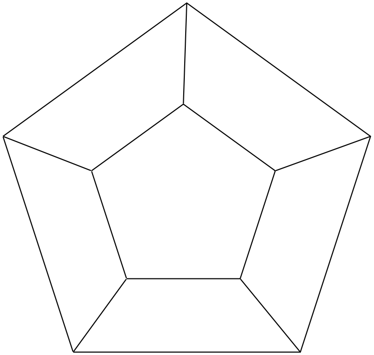
Graphes

Réseau de trains. $\rightsquigarrow$ Représenter n'importe quelles contraintes.

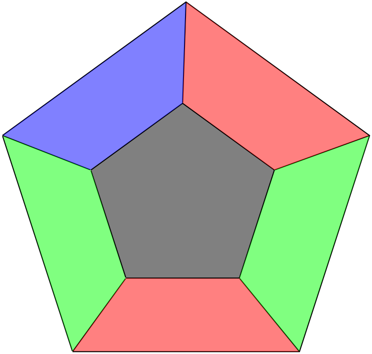


Pas ici : arêtes multiples, arêtes pondérées, arêtes dirigées.

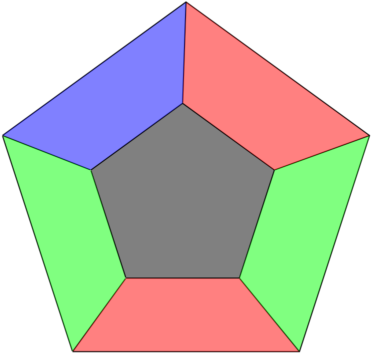
Graphes planaires



Graphes planaires



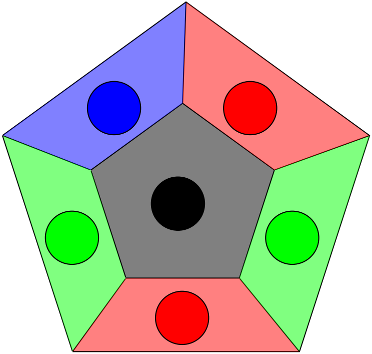
Graphes planaires



Question (Guthrie 1852)

Toutes les cartes sont-elles 4-coloriables?

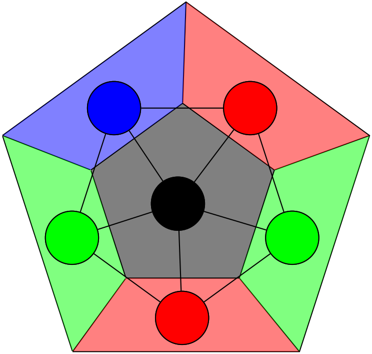
Graphes planaires



Question (Guthrie 1852)

Toutes les cartes sont-elles 4-coloriables?

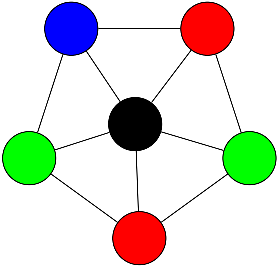
Graphes planaires



Question (Guthrie 1852)

Toutes les cartes sont-elles 4-coloriables?

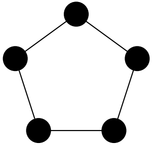
Graphes planaires



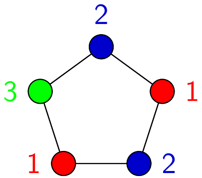
Question (Guthrie 1852)

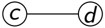
Toutes les cartes sont-elles 4-coloriables?

Coloration



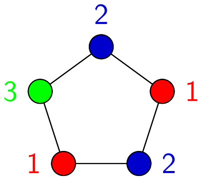
Coloration



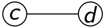


$\Rightarrow c \neq d$

Coloration

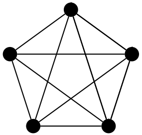


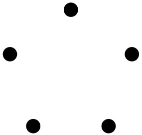
χ : Nombre minimum de couleurs pour garantir :

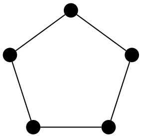


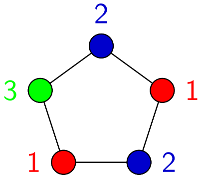
$\Rightarrow c \neq d$

Quelques concepts de base

Clique : 

Stable : 

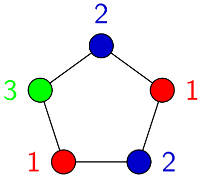
Cycle : 



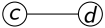
χ : Nombre minimum de couleurs pour garantir :

$$c \text{ — } d \;\Rightarrow c \neq d$$

Coloration



χ : Nombre minimum de couleurs pour garantir :



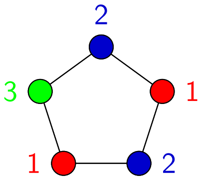
$\Rightarrow c \neq d$

ω : Taille maximale d'une clique

α : Taille maximale d'un stable

g : Taille minimale d'un cycle

Coloration



χ : Nombre minimum de couleurs pour garantir :

$$\text{(c)} \longrightarrow \text{(d)} \;\Rightarrow c \neq d$$

ω : Taille maximale d'une clique

α : Taille maximale d'un stable

g : Taille minimale d'un cycle

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} \omega \\ \frac{|V|}{\alpha} \end{array}\right\} \leq \chi \leq |V| - (\alpha - 1)}$$

$\alpha + \omega$?

- $\alpha + \omega \geq \log_2 |V|$ (par induction) $\rightsquigarrow$ nombres de Ramsey

$\alpha + \omega$?

- $\alpha + \omega \geq \log_2 |V|$ (par induction) $\rightsquigarrow$ nombres de Ramsey
- Peut-on obtenir $\alpha \cdot \omega \geq \sqrt{|V|}$? (Parallèle avec le théorème de Dilworth)

$\alpha + \omega$?

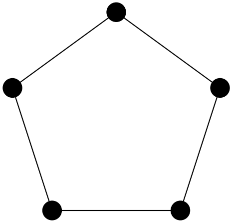
- $\alpha + \omega \geq \log_2 |V|$ (par induction) $\rightsquigarrow$ nombres de Ramsey
- Peut-on obtenir $\alpha \cdot \omega \geq \sqrt{|V|}$? (Parallèle avec le théorème de Dilworth)
- Non : prendre un grand ensemble de sommets, et mettre chaque arête avec probabilité 0.5.

$\alpha + \omega$?

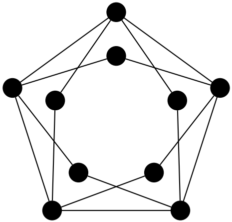
- $\alpha + \omega \geq \log_2 |V|$ (par induction) $\rightsquigarrow$ nombres de Ramsey
- Peut-on obtenir $\alpha \cdot \omega \geq \sqrt{|V|}$? (Parallèle avec le théorème de Dilworth)
- Non : prendre un grand ensemble de sommets, et mettre chaque arête avec probabilité 0.5.
- Il existe une famille infinie de graphes satisfaisant $\alpha + \omega \leq 5 \log_2 |V|$.

Et si pas de grosse clique ?

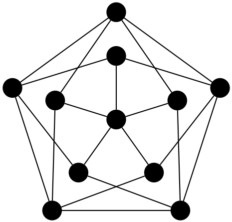
Et si pas de grosse clique ?



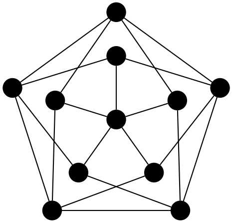
Et si pas de grosse clique ?



Et si pas de grosse clique ?



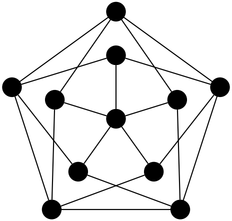
Et si pas de grosse clique ? ...pas de petit cycle ?



Théorème (Mycielski 1955)

$\forall$ k, *il y a un graphe* H_k *avec* $\chi(H_k) \geq k$ *et* $\omega(H_k) = 2$.

Et si pas de grosse clique ? ...pas de petit cycle ?



Théorème (Mycielski 1955)

$\forall$ k, il y a un graphe H_k avec $\chi(H_k) \geq k$ et $\omega(H_k) = 2$.

Théorème (Erdős 1959)

$\forall$ k, $\forall$ ℓ, il y a un graphe H_k avec $\chi(H_k) \geq k$, $\omega(H_k) = 2$ et $g(H_k) = \ell$.

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ?

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ? Forêt 😎

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ? Forêt 😎

Aucun cycle (induit) de longueur 4^+ ?

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ? Forêt 😎

Aucun cycle (induit) de longueur 4^+ ? Graphe cordal 😎

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ? Forêt 😎

Aucun cycle (induit) de longueur 4^+ ? Graphe cordal 😎
($\rightsquigarrow$ Clique d'articulation)

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ? Forêt 😎

Aucun cycle (induit) de longueur 4^+ ? Graphe cordal 😎
($\rightsquigarrow$ Clique d'articulation)

Aucun cycle impair ?

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ? Forêt 😎

Aucun cycle (induit) de longueur 4^+ ? Graphe cordal 😎
($\rightsquigarrow$ Clique d'articulation)

Aucun cycle impair ? Graphe biparti 😎

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ? Forêt 😎

Aucun cycle (induit) de longueur 4^+ ? Graphe cordal 😎
($\rightsquigarrow$ Clique d'articulation)

Aucun cycle impair ? Graphe biparti 😎

Aucun cycle (induit) impair de longueur 5^+ ?

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ? Forêt

Aucun cycle (induit) de longueur 4^+ ? Graphe cordal
($\rightsquigarrow$ Clique d'articulation)

Aucun cycle impair ? Graphe biparti

Aucun cycle (induit) impair de longueur 5^+ ?

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ? Forêt 😎

Aucun cycle (induit) de longueur 4^+ ? Graphe cordal 😎
($\rightsquigarrow$ Clique d'articulation)

Aucun cycle impair ? Graphe biparti 😎

Aucun cycle (induit) impair de longueur 5^+ ? 😕 Ni leur complémentaire ?

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ? Forêt 😎

Aucun cycle (induit) de longueur 4^+ ? Graphe cordal 😎
($\leadsto$ Clique d'articulation)

Aucun cycle impair ? Graphe biparti 😎

Aucun cycle (induit) impair de longueur 5^+ ? 🙁 Ni leur complémentaire ? Graphe parfait 😎

En interdisant **beaucoup** de cycles

Aucun cycle ? Forêt 😎

Aucun cycle (induit) de longueur 4^+ ? Graphe cordal 😎
($\rightsquigarrow$ Clique d'articulation)

Aucun cycle impair ? Graphe biparti 😎

Aucun cycle (induit) impair de longueur 5^+ ? 🙁 Ni leur complémentaire ? Graphe parfait 😎 Théorème de 2002 de Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas : 179 pages

Graphe G *parfait* si $\forall H \subset_{ind} G$, on a $\chi(H) = \omega(H)$.

Conclusion

Rdv lundi 15 à 11h pour le cours d'Irena !