Nombre chromatique et sous-graphes induits (Partie 2)

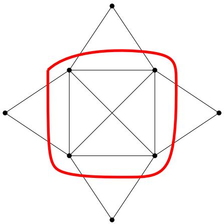
Marthe Bonamy[1] Irena Penev[2]

15 juin 2020

[1]LaBRI, CNRS
[2]IÚUK, Université Charles de Prague

Définition

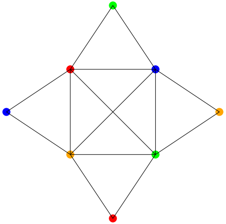
Une *clique* d'un graphe G est un ensemble de sommets de G deux à deux adjacents. Le *nombre de clique* de G, dénoté $\omega(G)$, est la taille maximum d'une clique de G.



$\omega = 4$

Définition

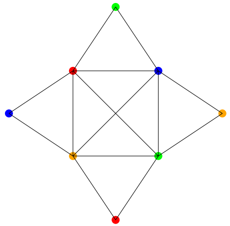
Le *nombre chromatique* d'un graphe G, dénoté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorer les sommets de G de façon à ce que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs distinctes.



$$\chi = 4$$

Définition

Le *nombre chromatique* d'un graphe G, dénoté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorer les sommets de G de façon à ce que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs distinctes.



$$\chi = 4$$

Remarque

Tout graphe G vérifie $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Définition

Un graphe G est *parfait* si tout sous-graphe induit H de G vérifie $\chi(H) = \omega(H)$.

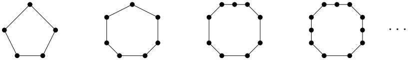
Définition

Un graphe G est *parfait* si tout sous-graphe induit H de G vérifie $\chi(H) = \omega(H)$.

Définition

Un graphe est dit *de Berge* si ni lui ni son complémentaire ne contiennent de trou impair.[a]

[a] Un *trou* dans un graphe G est un cycle induit de G de longueur ≥ 4. Il est *pair* ou *impair* selon la parité de sa longueur.



C_5 C_7 C_9 C_{11} $\dots$

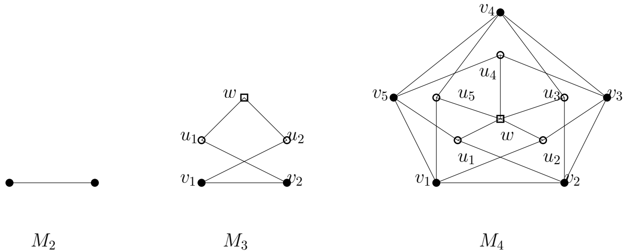
Le théorème fort des graphes parfaits [Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2002]

Un graphe est parfait si et seulement si il est de Berge.

Théorème [Zykov, 1949; Mycielski, 1955]

Pour tout entier k, il existe un graphe G sans triangle[a] tel que $\chi(G) = k$.

[a] Donc : $\omega(G) \leq 2$.



Les graphes de Mycielski (pour $\chi = 2, 3, 4$)

Remarque

Tout graphe G vérifie $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Définition

Un graphe G est *parfait* si tout sous-graphe induit H de G vérifie $\chi(H) = \omega(H)$.

Théorème [Zykov, 1949; Mycielski, 1955]

Pour tout entier k, il existe un graphe G sans triangle[a] tel que $\chi(G) = k$.

[a] Donc : $\omega(G) \leq 2$.

Remarque

Tout graphe G vérifie $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Définition

Un graphe G est *parfait* si tout sous-graphe induit H de G vérifie $\chi(H) = \omega(H)$.

Théorème [Zykov, 1949; Mycielski, 1955]

Pour tout entier k, il existe un graphe G sans triangle[a] tel que $\chi(G) = k$.

[a] Donc : $\omega(G) \leq 2$.

Définition [Gyárfás, 1987]

Une classe $\mathcal{G}$ est χ-*bornée* s'il existe une fonction f telle que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq f(\omega(G))$.

Définition [Gyárfás, 1987]

Une classe $\mathcal{G}$ est χ-*bornée* s'il existe une fonction f telle que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq f(\omega(G))$.

- Par définition, la classe des graphes parfaits est χ-bornée par la fonction identité.
  - Par le théorème fort des graphes parfaits, la classe des graphes de Berge est χ-bornée par la fonction identité.

Définition [Gyárfás, 1987]

Une classe $\mathcal{G}$ est *χ-bornée* s'il existe une fonction f telle que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq f(\omega(G))$.

- Par définition, la classe des graphes parfaits est χ-bornée par la fonction identité.
  - Par le théorème fort des graphes parfaits, la classe des graphes de Berge est χ-bornée par la fonction identité.
- La classe de tous les graphes n'est pas χ-bornée.
  - En effet, supposons que la classe de tous les graphes est χ-bornée par f. Alors tous graphe G sans triangle vérifie $\chi(G) \leq f(\omega(G)) \leq \max\{f(1), f(2)\}$, ce qui est faux par le théorème de Mycielski (et de Zykov).

Définition [Gyárfás, 1987]

Une classe $\mathcal{G}$ est *χ-bornée* s'il existe une fonction f telle que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq f(\omega(G))$.

- Par définition, la classe des graphes parfaits est χ-bornée par la fonction identité.
  - Par le théorème fort des graphes parfaits, la classe des graphes de Berge est χ-bornée par la fonction identité.
- La classe de tous les graphes n'est pas χ-bornée.
  - En effet, supposons que la classe de tous les graphes est χ-bornée par f. Alors tous graphe G sans triangle vérifie $\chi(G) \leq f(\omega(G)) \leq \max\{f(1), f(2)\}$, ce qui est faux par le théorème de Mycielski (et de Zykov).
- Dans la recherche concernant les classes χ-bornées, on se limite normalement aux classes "héréditaires".

Définition

Une classe de graphes est *héréditaire* si tout sous-graphe induit d'un graphe de la classe appartient également à la classe.

Définition

Une classe de graphes est *héréditaire* si tout sous-graphe induit d'un graphe de la classe appartient également à la classe.

- La classe des graphes parfaits est héréditaire.

Définition

Une classe de graphes est *héréditaire* si tout sous-graphe induit d'un graphe de la classe appartient également à la classe.

- La classe des graphes parfaits est héréditaire.
- La classe des graphes de Mycielski n'est pas héréditaire.

Définition

Une classe de graphes est *héréditaire* si tout sous-graphe induit d'un graphe de la classe appartient également à la classe.

- La classe des graphes parfaits est héréditaire.
- La classe des graphes de Mycielski n'est pas héréditaire.
  - Par contre, la classe de tous les sous-graphes induits des graphes de Mycielski est héréditaire. Cette classe est en fait la classe de tous les graphes sans triangle (preuve: exercice).

Définition

Une classe de graphes est *héréditaire* si tout sous-graphe induit d'un graphe de la classe appartient également à la classe.

- La classe des graphes parfaits est héréditaire.
- La classe des graphes de Mycielski n'est pas héréditaire.
  - Par contre, la classe de tous les sous-graphes induits des graphes de Mycielski est héréditaire. Cette classe est en fait la classe de tous les graphes sans triangle (preuve: exercice).

Remarque

Une classe $\mathcal{G}$ est héréditaire si et seulement si il existe une famille $\mathcal{H}$ de graphes tel que $\mathcal{G} = \mathrm{Forb}(\mathcal{H})$.[a]

---

[a] Forb($\mathcal{H}$) est la classe de tout les graphes ne contenant aucun graphe de $\mathcal{H}$ comme sous-graphe induit.

- Supposons qu'on veut démontrer que la classe $\mathcal{G} := \text{Forb}(\mathcal{H})$ est χ-bornée. Quelles sont les méthodes principales qu'on pourrait utiliser ?

- Supposons qu'on veut démontrer que la classe $\mathcal{G} := \mathrm{Forb}(\mathcal{H})$ est χ-bornée. Quelles sont les méthodes principales qu'on pourrait utiliser ?
- Première méthode : la méthode dite "structurelle".

- Supposons qu'on veut démontrer que la classe $\mathcal{G} := \mathrm{Forb}(\mathcal{H})$ est χ-bornée. Quelles sont les méthodes principales qu'on pourrait utiliser ?
- Première méthode : la méthode dite "structurelle".
  - D'abord, on démontre un "théorème de décomposition" pour la classe $\mathcal{G}$, c'est-à-dire, un théorème déclarant que tout graphe dans $\mathcal{G}$ soit appartient à une classe "basique", soit admet une "décomposition".

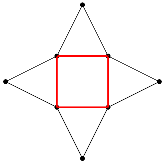
- Supposons qu'on veut démontrer que la classe $\mathcal{G} := \text{Forb}(\mathcal{H})$ est χ-bornée. Quelles sont les méthodes principales qu'on pourrait utiliser ?
- Première méthode : la méthode dite “structurelle”.
  - D'abord, on démontre un “théorème de décomposition” pour la classe $\mathcal{G}$, c'est-à-dire, un théorème déclarant que tout graphe dans $\mathcal{G}$ soit appartient à une classe “basique”, soit admet une “décomposition”.
  - Après, on utilise ce théorème pour démontrer que $\mathcal{G}$ est χ-bornée.

- Supposons qu'on veut démontrer que la classe $\mathcal{G} := \text{Forb}(\mathcal{H})$ est χ-bornée. Quelles sont les méthodes principales qu'on pourrait utiliser ?
- Première méthode : la méthode dite "structurelle".
  - D'abord, on démontre un "théorème de décomposition" pour la classe $\mathcal{G}$, c'est-à-dire, un théorème déclarant que tout graphe dans $\mathcal{G}$ soit appartient à une classe "basique", soit admet une "décomposition".
  - Après, on utilise ce théorème pour démontrer que $\mathcal{G}$ est χ-bornée.
- Le théorème fort des graphes parfait a été démontré par la méthode structurelle :
  - d'abord, un théorème de décomposition pour les graphes de Berge ;
  - après, comme corollaire, tout graphe de Berge est parfait.

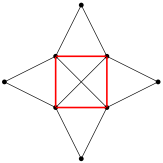
Définition

Un graphe est dit *cordal* si il ne contient pas de trou.[a]

[a] Un *trou* dans un graphe G est un cycle induit de G de longueur ≥ 4.



graphe non-cordal

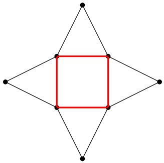


graphe cordal

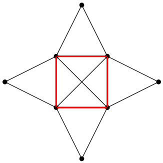
Définition

Un graphe est dit *cordal* si il ne contient pas de trou.[a]

[a] Un *trou* dans un graphe G est un cycle induit de G de longueur ≥ 4.



graphe non-cordal



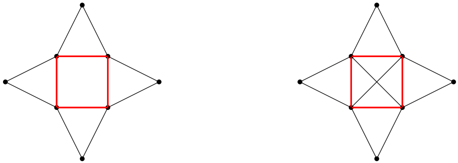
graphe cordal

- Objectif : démontrer un théorème de décomposition pour les graphes cordaux, et puis l'utiliser pour démontrer que tout graphe cordal G vérifie $\chi(G) = \omega(G)$.

Définition

Un graphe est dit *cordal* si il ne contient pas de trou.[a]

[a] Un *trou* dans un graphe G est un cycle induit de G de longueur ≥ 4.



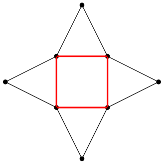
graphe non-cordal — graphe cordal

- Objectif : démontrer un théorème de décomposition pour les graphes cordaux, et puis l'utiliser pour démontrer que tout graphe cordal G vérifie $\chi(G) = \omega(G)$.
    - Puisque tout sous-graphe induit d'un graphe cordal est cordal, ceci implique que les graphes cordaux sont parfaits.

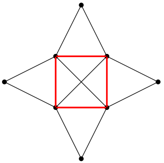
Définition

Un graphe est dit *cordal* si il ne contient pas de trou.[a]

[a] Un *trou* dans un graphe G est un cycle induit de G de longueur ≥ 4.



graphe non-cordal



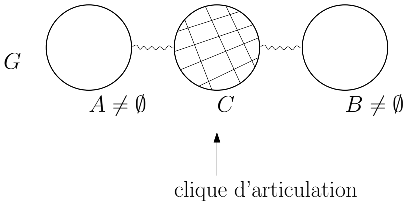
graphe cordal

- Objectif : démontrer un théorème de décomposition pour les graphes cordaux, et puis l'utiliser pour démontrer que tout graphe cordal G vérifie $\chi(G) = \omega(G)$.
  - Puisque tout sous-graphe induit d'un graphe cordal est cordal, ceci implique que les graphes cordaux sont parfaits.
  - Autrement dit, la classe des graphes cordaux est héréditaire et χ-bornée par la fonction identité.

Définition

Un *ensemble d'articulation* d'un graphe G est un ensemble $C \subsetneq V(G)$ tel que $G \setminus C$ n'est pas connexe. Une *clique d'articulation* de G est une clique de G qui est un ensemble d'articulation.[a]

[a] En particulier, si G n'est pas connexe, alors $\emptyset$ est une clique d'articulation de G.



Théorème de décomposition pour les graphes cordaux [Dirac, 1961]

Soit G un graphe cordal. Alors G est complet[a] ou admet une clique d'articulation.

[a] Un graphe est *complet* si ses sommets sont deux à deux adjacents.

Théorème de décomposition pour les graphes cordaux [Dirac, 1961]

Soit G un graphe cordal. Alors G est complet[a] ou admet une clique d'articulation.

[a] Un graphe est *complet* si ses sommets sont deux à deux adjacents.

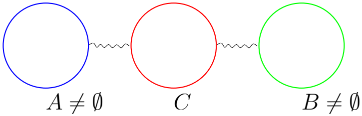
Preuve. Supposons que G est cordal et n'est pas complet. Alors G admet un ensemble d'articulation.

Théorème de décomposition pour les graphes cordaux [Dirac, 1961]

Soit G un graphe cordal. Alors G est complet[a] ou admet une clique d'articulation.

[a] Un graphe est *complet* si ses sommets sont deux à deux adjacents.

Preuve. Supposons que G est cordal et n'est pas complet. Alors G admet un ensemble d'articulation. Soit C un ensemble d'articulation minimal de G. Soient A et B les ensembles des sommets de deux composantes connexes distinctes de $G \setminus C$. Par la minimalité de C, tout sommet de C a un voisin dans A et un voisin dans B.

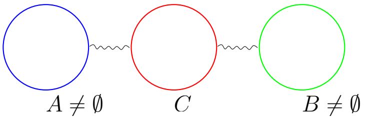


Théorème de décomposition pour les graphes cordaux [Dirac, 1961]

Soit G un graphe cordal. Alors G est complet[a] ou admet une clique d'articulation.

[a] Un graphe est *complet* si ses sommets sont deux à deux adjacents.

Preuve. Supposons que G est cordal et n'est pas complet. Alors G admet un ensemble d'articulation. Soit C un ensemble d'articulation minimal de G. Soient A et B les ensembles des sommets de deux composantes connexes distinctes de $G \setminus C$. Par la minimalité de C, tout sommet de C a un voisin dans A et un voisin dans B.

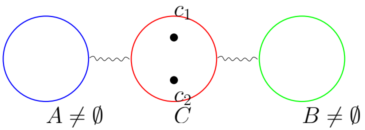


Nous allons démontrer que C est une clique (et donc une clique d'articulation) de G.

Théorème de décomposition pour les graphes cordaux [Dirac, 1961]

Soit G un graphe cordal. Alors G est complet ou admet une clique d'articulation.

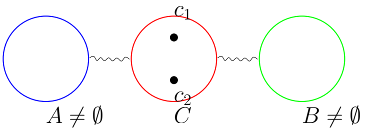
Preuve (cont.). Supposons par l'absurde que C n'est pas une clique, et soient $c_1, c_2 \in C$ distincts et non-adjacents.



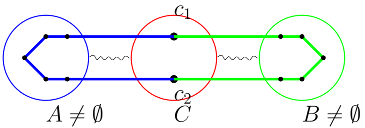
Théorème de décomposition pour les graphes cordaux [Dirac, 1961]

Soit G un graphe cordal. Alors G est complet ou admet une clique d'articulation.

Preuve (cont.). Supposons par l'absurde que C n'est pas une clique, et soient $c_1, c_2 \in C$ distincts et non-adjacents.



Les graphes $G[A \cup \{c_1, c_2\}]$ et $G[B \cup \{c_1, c_2\}]$ sont connexes.



Ceci est un trou dans G, contrairement au fait que G est cordal.

Corollaire [Dirac, 1961]

Tout graphe cordal G vérifie $\chi(G) = \omega(G)$.[a] Donc, la classe des graphes cordaux est χ-bornée par la fonction identité.

[a] Puisque tout sous-graphe induit d'un graphe cordal est cordal, ceci implique que les graphes cordaux sont parfaits.

Corollaire [Dirac, 1961]

Tout graphe cordal G vérifie $\chi(G) = \omega(G)$.[a] Donc, la classe des graphes cordaux est χ-bornée par la fonction identité.

[a] Puisque tout sous-graphe induit d'un graphe cordal est cordal, ceci implique que les graphes cordaux sont parfaits.

Preuve. Soit G un graphe cordal et supposons par récursion que tout graphe cordal G' tel que $|V(G')| < |V(G)|$ vérifie $\chi(G') = \omega(G')$.

Corollaire [Dirac, 1961]

Tout graphe cordal G vérifie $\chi(G) = \omega(G)$.[a] Donc, la classe des graphes cordaux est χ-bornée par la fonction identité.

[a] Puisque tout sous-graphe induit d'un graphe cordal est cordal, ceci implique que les graphes cordaux sont parfaits.

Preuve. Soit G un graphe cordal et supposons par récursion que tout graphe cordal G' tel que $|V(G')| < |V(G)|$ vérifie $\chi(G') = \omega(G')$.

Si G est complet, alors évidemment, $\chi(G) = \omega(G)$.

Corollaire [Dirac, 1961]

Tout graphe cordal G vérifie $\chi(G) = \omega(G)$.[a] Donc, la classe des graphes cordaux est χ-bornée par la fonction identité.

[a] Puisque tout sous-graphe induit d'un graphe cordal est cordal, ceci implique que les graphes cordaux sont parfaits.

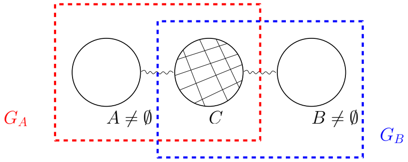
Preuve. Soit G un graphe cordal et supposons par récursion que tout graphe cordal G' tel que $|V(G')| < |V(G)|$ vérifie $\chi(G') = \omega(G')$.

Si G est complet, alors évidemment, $\chi(G) = \omega(G)$. On peut donc supposer que G n'est pas complet. Alors (par le théorème de décomposition) G admet une clique d'articulation.

Corollaire [Dirac, 1961]

Tout graphe cordal G vérifie $\chi(G) = \omega(G)$. Donc, la classe des graphes cordaux est χ-bornée par la fonction identité.

Preuve (cont.).



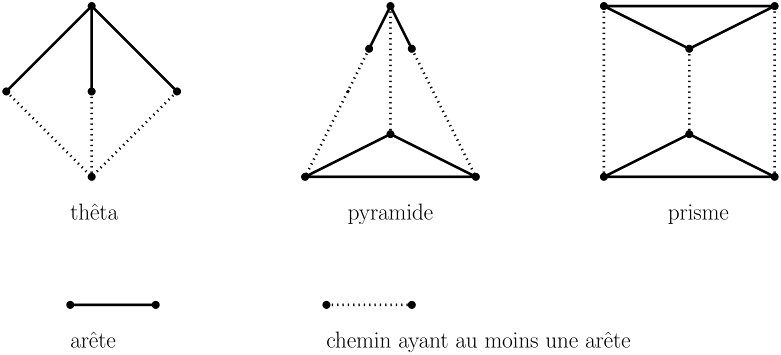
$$
\begin{aligned}
\chi(G) &= \max\{\chi(G_A), \chi(G_B)\} && \text{parce que } C \text{ est une clique d'articulation} \\
&= \max\{\omega(G_A), \omega(G_B)\} && \text{par récursion} \\
&= \omega(G) && \text{parce que } C \text{ est un ensemble d'articulation}
\end{aligned}
$$

Définition

Les *configurations de Truemper* sont les thêtas, les pyramides, les prismes et les roues.

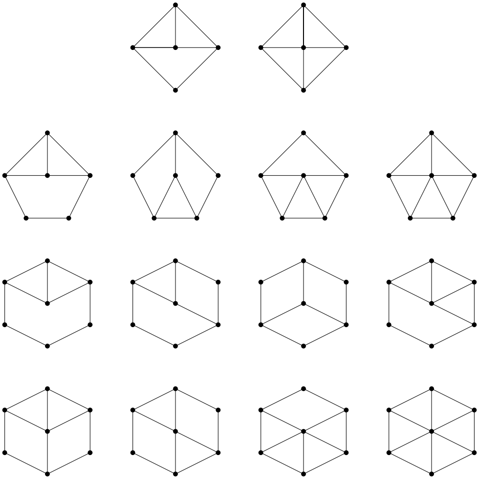
Définition

Les *configurations de Truemper* sont les thêtas, les pyramides, les prismes et les roues.



Définition

On appelle *roue* tout graphe formé en ajoutant un sommet à un trou et en reliant ce sommet à au moins trois sommets de ce trou.



- On dénote $\mathcal{T}$ la classe de tous les graphes ne contenant aucune configuration de Truemper comme sous-graphe induit.

- On dénote $\mathcal{T}$ la classe de tous les graphes ne contenant aucune configuration de Truemper comme sous-graphe induit.
- Toute configuration de Truemper contient un trou. Donc, $\mathcal{T}$ contient tous les graphes cordaux.

- On dénote $\mathcal{T}$ la classe de tous les graphes ne contenant aucune configuration de Truemper comme sous-graphe induit.
- Toute configuration de Truemper contient un trou. Donc, $\mathcal{T}$ contient tous les graphes cordaux.

Théorème [Conforti, Cornuéjols, Kapoor, Vušković, 1997]

Soit $G \in \mathcal{T}$. Alors l'une de ces trois conditions est satisfaite :

- G est un graphe complet;
- G est un cycle;
- G admet une clique d'articulation.

- On dénote $\mathcal{T}$ la classe de tous les graphes ne contenant aucune configuration de Truemper comme sous-graphe induit.
- Toute configuration de Truemper contient un trou. Donc, $\mathcal{T}$ contient tous les graphes cordaux.

Théorème [Conforti, Cornuéjols, Kapoor, Vušković, 1997]

Soit $G \in \mathcal{T}$. Alors l'une de ces trois conditions est satisfaite :

- G est un graphe complet;
- G est un cycle;
- G admet une clique d'articulation.

Corollaire [Conforti, Cornuéjols, Kapoor, Vušković, 1997]

La classe $\mathcal{T}$ est χ-bornée par la fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ définie par $f(2) = 3$ et $f(n) = n$ pour tout $n \neq 2$.[a]

[a] Donc, tout graphe $G \in \mathcal{T}$ vérifie $\chi(G) \leq \max\{\omega(G), 3\}$.

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

---

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

Conjecture [Erdős-Hajnal, 1989]

Pour tout graphe H, il existe $\epsilon_H > 0$ tel que tout graphe G sans H induit satisfait $\alpha(G)\omega(G) \geq |V(G)|^{\epsilon_H}$.

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

Conjecture [Erdős-Hajnal, 1989]

Pour tout graphe H, il existe $\epsilon_H > 0$ tel que tout graphe G sans H induit satisfait $\alpha(G)\omega(G) \geq |V(G)|^{\epsilon_H}$.

- Si $\mathcal{G}$ est polynomialement χ-bornée, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ vérifie $\alpha(G)\omega(G) \geq |V(G)|^{\epsilon}$.

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

Conjecture [Erdős-Hajnal, 1989]

Pour tout graphe H, il existe $\epsilon_H > 0$ tel que tout graphe G sans H induit satisfait $\alpha(G)\omega(G) \geq |V(G)|^{\epsilon_H}$.

- Si $\mathcal{G}$ est polynomialement χ-bornée, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ vérifie $\alpha(G)\omega(G) \geq |V(G)|^{\epsilon}$.
- Donc, si Forb(H) est polynomialement χ-bornée, alors H vérifie la conjecture d'Erdős-Hajnal.

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

Conjecture [Erdős-Hajnal, 1989]

Pour tout graphe H, il existe $\epsilon_H > 0$ tel que tout graphe G sans H induit satisfait $\alpha(G)\omega(G) \geq |V(G)|^{\epsilon_H}$.

- Si $\mathcal{G}$ est polynomialement χ-bornée, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ vérifie $\alpha(G)\omega(G) \geq |V(G)|^{\epsilon}$.
- Donc, si Forb(H) est polynomialement χ-bornée, alors H vérifie la conjecture d'Erdős-Hajnal.
- Le contraire est faux ! Il existe des graphes H vérifiant la conjecture d'Erdős-Hajnal, mais tels que Forb(H) n'est pas χ-bornée.
  - Par exemple, ceci est le cas pour $H = K_3$.

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

- Est-ce vrai ?

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

- Est-ce vrai ?
- Probablement pas...

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

- Est-ce vrai ?
- Probablement pas...
  - Mais pour le moment, on ne connaît aucun contrexemple !

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

- Est-ce vrai ?
- Probablement pas...
  - Mais pour le moment, on ne connaît aucun contrexemple !
- La méthode structurelle est la seule qui permet d'obtenir de bonnes bornes (polynomiales, parfois linéaires, parfois optimales).

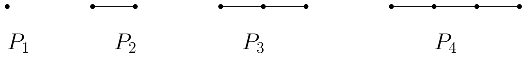
Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

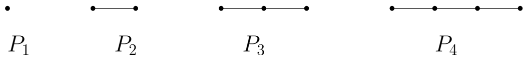
[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

- Est-ce vrai ?
- Probablement pas...
  - Mais pour le moment, on ne connaît aucun contrexemple !
- La méthode structurelle est la seule qui permet d'obtenir de bonnes bornes (polynomiales, parfois linéaires, parfois optimales).
- Mais les théorèmes de décomposition se généralisent très mal !

- Soit P_k le chemin à k sommets (et $k - 1$ arêtes).

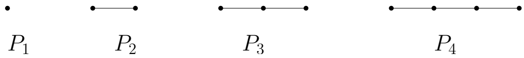


- Soit P_k le chemin à k sommets (et $k-1$ arêtes).



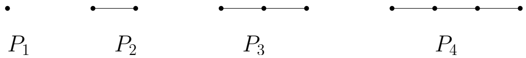
- $\mathrm{Forb}(P_2) = \{$graphes sans arête$\}$
    - Donc, les graphes sans P_2 induit sont parfaits.

- Soit P_k le chemin à k sommets (et $k-1$ arêtes).



- $\text{Forb}(P_2) = \{\text{graphes sans arête}\}$
  - Donc, les graphes sans P_2 induit sont parfaits.
- $\text{Forb}(P_3) = \{\text{unions disjointes de graphes complets}\}$
  - Donc, les graphes sans P_3 induit sont parfaits.

- Soit P_k le chemin à k sommets (et $k-1$ arêtes).



- $\mathrm{Forb}(P_2) = \{$graphes sans arête$\}$
  - Donc, les graphes sans P_2 induit sont parfaits.
- $\mathrm{Forb}(P_3) = \{$unions disjointes de graphes complets$\}$
  - Donc, les graphes sans P_3 induit sont parfaits.

Théorème [Seinsche, 1974]

Soit $G \in \mathrm{Forb}(P_4)$. Si G a au moins deux sommets, alors G ou $\overline{G}$ n'est pas connexe. Donc, les graphes sans P_4 induit sont parfaits.

- Soit P_k le chemin à k sommets (et $k-1$ arêtes).

P_1 P_2 P_3 P_4

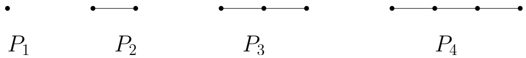
- $\mathrm{Forb}(P_2) = \{\text{graphes sans arête}\}$
  - Donc, les graphes sans P_2 induit sont parfaits.
- $\mathrm{Forb}(P_3) = \{\text{unions disjointes de graphes complets}\}$
  - Donc, les graphes sans P_3 induit sont parfaits.

Théorème [Seinsche, 1974]

Soit $G \in \mathrm{Forb}(P_4)$. Si G a au moins deux sommets, alors G ou $\overline{G}$ n'est pas connexe. Donc, les graphes sans P_4 induit sont parfaits.

- Et $\mathrm{Forb}(P_5)$??

- Soit P_k le chemin à k sommets (et $k-1$ arêtes).



- $\mathrm{Forb}(P_2) = \{\text{graphes sans arête}\}$
  - Donc, les graphes sans P_2 induit sont parfaits.
- $\mathrm{Forb}(P_3) = \{\text{unions disjointes de graphes complets}\}$
  - Donc, les graphes sans P_3 induit sont parfaits.

Théorème [Seinsche, 1974]

Soit $G \in \mathrm{Forb}(P_4)$. Si G a au moins deux sommets, alors G ou $\overline{G}$ n'est pas connexe. Donc, les graphes sans P_4 induit sont parfaits.

- Et $\mathrm{Forb}(P_5)$??
- En fait, $\mathrm{Forb}(P_k)$ est χ-bornée pour tout k.
  - La preuve n'est pas structurelle.
  - Pour $k \geq 5$, la meilleure borne connue est exponentielle. (Mais est-ce optimal ??)

Théorème [Gyárfás, 1987]

Pour tout entier $k \geq 2$, la classe Forb(P_k) est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-1)^{n-1}$.[a]

[a] C'est-à-dire : tout graphe G sans P_k induit vérifie $\chi(G) \leq (k-1)^{\omega(G)-1}$.

Théorème [Gyárfás, 1987]

Pour tout entier $k \geq 2$, la classe $\mathrm{Forb}(P_k)$ est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-1)^{n-1}$.[a]

[a] C'est-à-dire : tout graphe G sans P_k induit vérifie $\chi(G) \leq (k-1)^{\omega(G)-1}$.

Preuve. Par récursion sur le nombre de clique.

Théorème [Gyárfás, 1987]

Pour tout entier $k \geq 2$, la classe $\mathrm{Forb}(P_k)$ est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-1)^{n-1}$.[a]

[a] C'est-à-dire : tout graphe G sans P_k induit vérifie $\chi(G) \leq (k-1)^{\omega(G)-1}$.

Preuve. Par récursion sur le nombre de clique. Soit $G \in \mathrm{Forb}(P_k)$. On pose $\omega := \omega(G)$, et l'on suppose par récursion que tout graphe $G' \in \mathrm{Forb}(P_k)$ tel que $\omega(G') \leq \omega - 1$ vérifie $\chi(G') \leq (k-1)^{\omega(G')-1}$.

Théorème [Gyárfás, 1987]

Pour tout entier $k \geq 2$, la classe $\mathrm{Forb}(P_k)$ est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-1)^{n-1}$.[a]

[a] C'est-à-dire : tout graphe G sans P_k induit vérifie $\chi(G) \leq (k-1)^{\omega(G)-1}$.

Preuve. Par récursion sur le nombre de clique. Soit $G \in \mathrm{Forb}(P_k)$. On pose $\omega := \omega(G)$, et l'on suppose par récursion que tout graphe $G' \in \mathrm{Forb}(P_k)$ tel que $\omega(G') \leq \omega - 1$ vérifie $\chi(G') \leq (k-1)^{\omega(G')-1}$. Il faut démontrer que $\chi(G) \leq (k-1)^{\omega-1}$.

Théorème [Gyárfás, 1987]

Pour tout entier $k \geq 2$, la classe $\mathrm{Forb}(P_k)$ est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-1)^{n-1}$.[a]

[a] C'est-à-dire : tout graphe G sans P_k induit vérifie $\chi(G) \leq (k-1)^{\omega(G)-1}$.

Preuve. Par récursion sur le nombre de clique. Soit $G \in \mathrm{Forb}(P_k)$. On pose $\omega := \omega(G)$, et l'on suppose par récursion que tout graphe $G' \in \mathrm{Forb}(P_k)$ tel que $\omega(G') \leq \omega - 1$ vérifie $\chi(G') \leq (k-1)^{\omega(G')-1}$. Il faut démontrer que $\chi(G) \leq (k-1)^{\omega-1}$. On peut supposer que $\omega \geq 2$ (si $\omega = 1$, c'est trivial).

Théorème [Gyárfás, 1987]

Pour tout entier $k \geq 2$, la classe Forb(P_k) est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-1)^{n-1}$.[a]

[a] C'est-à-dire : tout graphe G sans P_k induit vérifie $\chi(G) \leq (k-1)^{\omega(G)-1}$.

Preuve. Par récursion sur le nombre de clique. Soit $G \in$ Forb(P_k). On pose $\omega := \omega(G)$, et l'on suppose par récursion que tout graphe $G' \in$ Forb(P_k) tel que $\omega(G') \leq \omega - 1$ vérifie $\chi(G') \leq (k-1)^{\omega(G')-1}$. Il faut démontrer que $\chi(G) \leq (k-1)^{\omega-1}$. On peut supposer que $\omega \geq 2$ (si $\omega = 1$, c'est trivial).

Supposons par l'absurde que $\chi(G) \geq (k-1)^{\omega-1} + 1$.

Théorème [Gyárfás, 1987]

Pour tout entier $k \geq 2$, la classe $\mathrm{Forb}(P_k)$ est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-1)^{n-1}$.[a]

[a] C'est-à-dire : tout graphe G sans P_k induit vérifie $\chi(G) \leq (k-1)^{\omega(G)-1}$.

Preuve. Par récursion sur le nombre de clique. Soit $G \in \mathrm{Forb}(P_k)$. On pose $\omega := \omega(G)$, et l'on suppose par récursion que tout graphe $G' \in \mathrm{Forb}(P_k)$ tel que $\omega(G') \leq \omega - 1$ vérifie $\chi(G') \leq (k-1)^{\omega(G')-1}$. Il faut démontrer que $\chi(G) \leq (k-1)^{\omega-1}$. On peut supposer que $\omega \geq 2$ (si $\omega = 1$, c'est trivial).

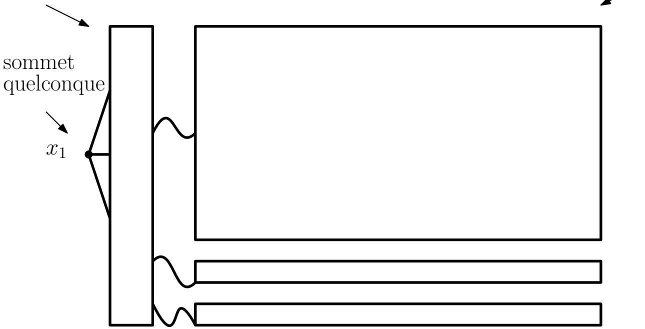
Supposons par l'absurde que $\chi(G) \geq (k-1)^{\omega-1} + 1$.

On peut supposer que G est connexe (sinon, au lieu de G, on considère la composante connexe de G ayant le plus grand nombre chromatique, c'est-à-dire, $\chi(G)$).

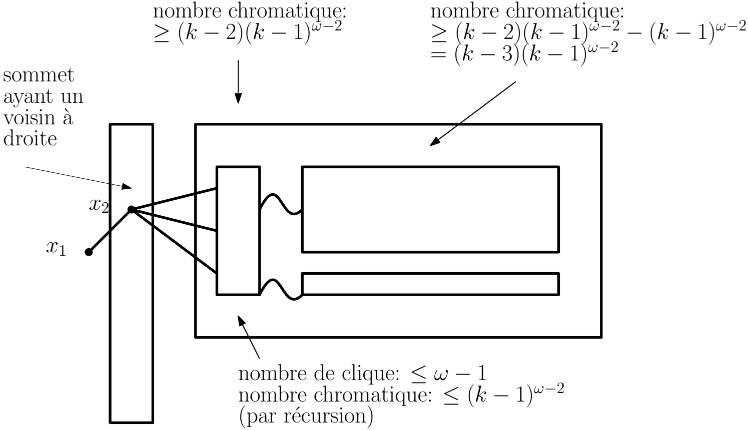
Preuve (cont.) $\qquad \omega(G) = \omega \qquad \chi(G) \geq (k-1)^{\omega-1} + 1$

nombre de clique: $\leq \omega - 1$
nombre chromatique: $\leq (k-1)^{\omega-2}$
(par récursion)

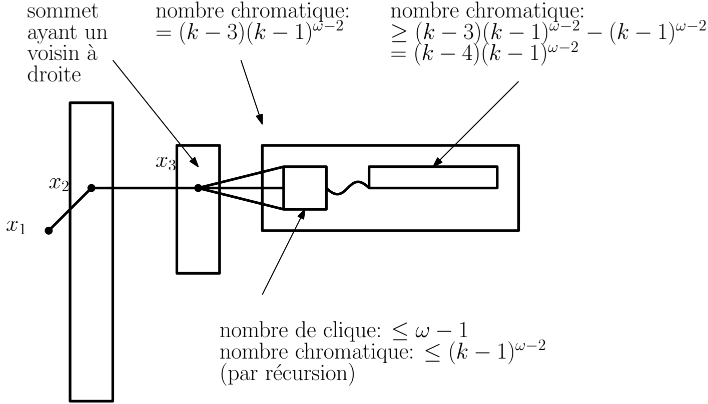
nombre chromatique:
$\geq ((k-1)^{\omega-1} + 1) - (1 + (k-1)^{\omega-2})$
$= (k-2)(k-1)^{\omega-2}$



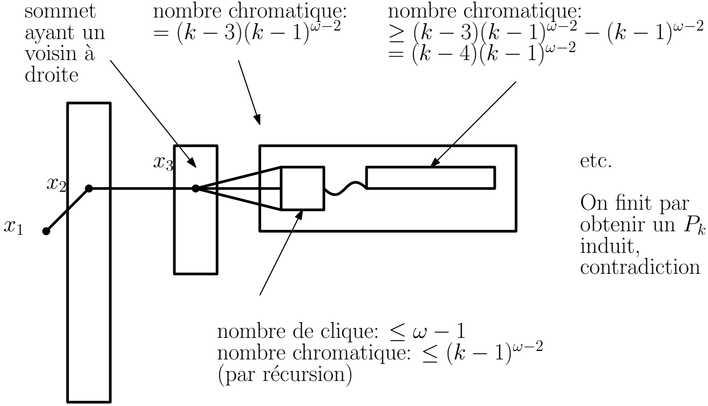
Preuve (cont.) $\quad \omega(G) = \omega \quad \chi(G) \geq (k-1)^{\omega-1} + 1$



Preuve (cont.) $\quad \omega(G) = \omega \quad \chi(G) \geq (k-1)^{\omega-1} + 1$



Preuve (cont.) $\qquad \omega(G) = \omega \qquad \chi(G) \geq (k-1)^{\omega-1} + 1$



etc.

On finit par obtenir un P_k induit, contradiction !

Théorème [Gyárfás, 1987]

Pour tout entier $k \geq 2$, la classe $\mathrm{Forb}(P_k)$ est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-1)^{n-1}$.

Théorème [Gyárfás, 1987]

Pour tout entier $k \geq 2$, la classe $\mathrm{Forb}(P_k)$ est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-1)^{n-1}$.

Théorème [Gravier, Hoàng, Maffray, 2003]

Pour tout entier $k \geq 4$, la classe $\mathrm{Forb}(P_k)$ est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-2)^{n-1}$.

Théorème [Gyárfás, 1987]

Pour tout entier $k \geq 2$, la classe $\mathrm{Forb}(P_k)$ est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-1)^{n-1}$.

Théorème [Gravier, Hoàng, Maffray, 2003]

Pour tout entier $k \geq 4$, la classe $\mathrm{Forb}(P_k)$ est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-2)^{n-1}$.

- Borne polynomiale pour $\mathrm{Forb}(P_k)$??

Théorème [Gyárfás, 1987]

Pour tout entier $k \geq 2$, la classe Forb(P_k) est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-1)^{n-1}$.

Théorème [Gravier, Hoàng, Maffray, 2003]

Pour tout entier $k \geq 4$, la classe Forb(P_k) est χ-bornée par la fonction $f_k(n) = (k-2)^{n-1}$.

- Borne polynomiale pour Forb(P_k) ??
- Au moins pour Forb(P_5) ??

- Une autre méthode : la méthode de nivellement (inventée par Alex Scott).

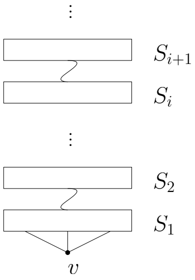
- Une autre méthode : la méthode de nivellement (inventée par Alex Scott).
  - Supposons qu'on veut démontrer que la classe Forb($\mathcal{H}$) est χ-bornée.

- Une autre méthode : la méthode de nivellement (inventée par Alex Scott).
  - Supposons qu'on veut démontrer que la classe Forb($\mathcal{H}$) est χ-bornée.
  - On procède par récursion sur ω : tous les graphes dans Forb($\mathcal{H}$) ayant un nombre de clique $\leq \omega - 1$, ont un "petit" nombre chromatique.

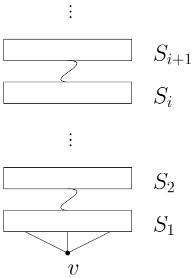
- Une autre méthode : la méthode de nivellement (inventée par Alex Scott).
  - Supposons qu'on veut démontrer que la classe Forb($\mathcal{H}$) est χ-bornée.
  - On procède par récursion sur ω : tous les graphes dans Forb($\mathcal{H}$) ayant un nombre de clique $\leq \omega - 1$, ont un "petit" nombre chromatique.
  - Soit G connexe, avec $\omega(G) = \omega$ et un "grand" nombre chromatique.

- Une autre méthode : la méthode de nivellement (inventée par Alex Scott).
  - Supposons qu'on veut démontrer que la classe Forb($\mathcal{H}$) est χ-bornée.
  - On procède par récursion sur ω : tous les graphes dans Forb($\mathcal{H}$) ayant un nombre de clique $\leq \omega - 1$, ont un "petit" nombre chromatique.
  - Soit G connexe, avec $\omega(G) = \omega$ et un "grand" nombre chromatique.
  - On veut trouver un graphe de $\mathcal{H}$ comme sous-graphe induit dans G (ce qui implique que $G \notin$ Forb($\mathcal{H}$)).

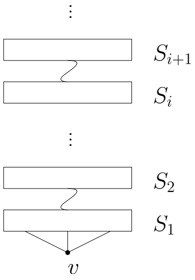
- Une autre méthode : la méthode de nivellement (inventée par Alex Scott).
  - Supposons qu'on veut démontrer que la classe Forb($\mathcal{H}$) est χ-bornée.
  - On procède par récursion sur ω : tous les graphes dans Forb($\mathcal{H}$) ayant un nombre de clique $\leq \omega - 1$, ont un "petit" nombre chromatique.
  - Soit G connexe, avec $\omega(G) = \omega$ et un "grand" nombre chromatique.
  - On veut trouver un graphe de $\mathcal{H}$ comme sous-graphe induit dans G (ce qui implique que $G \notin$ Forb($\mathcal{H}$)).
  - On prend on sommet v quelconque et l'on partition $V(G)$ selon la distance de ce sommet.



- Le ℓ-ème niveau est l'ensemble de sommets à distance ℓ de v. L'un de ces niveaux à un grand nombre chromatique ($\geq \frac{\chi(G)}{2}$).



- Le ℓ-ème niveau est l'ensemble de sommets à distance ℓ de v. L'un de ces niveaux à un grand nombre chromatique ($\geq \frac{\chi(G)}{2}$).
- En manipulant ce niveau, ainsi que les chemins entre ce niveau et le sommet v, on obtient un sous-graphe induit "interdit".



- Le ℓ-ème niveau est l'ensemble de sommets à distance ℓ de v. L'un de ces niveaux à un grand nombre chromatique ($\geq \frac{\chi(G)}{2}$).
- En manipulant ce niveau, ainsi que les chemins entre ce niveau et le sommet v, on obtient un sous-graphe induit "interdit".

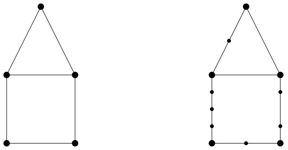
- Malheureusement, les bornes qu'on obtient par cette méthode sont (au moins) exponentielles.

- Quelques théorèmes obtenus par la méthode de nivellement de Scott...

- Quelques théorèmes obtenus par la méthode de nivellement de Scott...

Définition

Pour un graphe H, Forb$^*(H)$ est la classe de tous les graphes ne contenant aucune sous-division de H comme sous-graphe induit.



H — une sous-division de H

Théorème [Scott, 1997]

Pour tout arbre T, la classe Forb$^*(T)$ est χ-bornée.

- Quelques théorèmes obtenus par la méthode de nivellement de Scott...

Théorème [Scott, Seymour, 2016]

La classe des graphes sans trou impair est χ-bornée.

- Quelques théorèmes obtenus par la méthode de nivellement de Scott...

Théorème [Scott, Seymour, 2016]

La classe des graphes sans trou impair est χ-bornée.

Théorème [Chudnovsky, Scott, Seymour, 2017]

Pour tout entier $\ell \geq 4$, la classe des graphes sans trou de longueur $\geq \ell$ est χ-bornée.

- Quelques théorèmes obtenus par la méthode de nivellement de Scott...

Théorème [Scott, Seymour, 2016]

La classe des graphes sans trou impair est χ-bornée.

Théorème [Chudnovsky, Scott, Seymour, 2017]

Pour tout entier $\ell \geq 4$, la classe des graphes sans trou de longueur $\geq \ell$ est χ-bornée.

Théorème [Chudnovsky, Scott, Seymour, Spirkl, 2020]

Pour tout entier $\ell \geq 4$, la classe des graphes sans trou impair de longueur $\geq \ell$ est χ-bornée.

- Dans notre chapitre, vous pouvez lire la preuve d'un théorème un peu plus modeste (utilisant également la méthode de nivellement) :

Théorème [Scott, 1999]

Pour tout entier $\ell \geq 4$, la classe des graphes sans trou impair et sans trou de longueur $\geq \ell$ est χ-bornée.

Théorème [Scott, 1997]

Pour tout arbre T, la classe $\mathrm{Forb}^*(T)$ est χ-bornée.

Théorème [Scott, 1997]

Pour tout arbre T, la classe $\mathrm{Forb}^*(T)$ est χ-bornée.

Conjecture [Gyárfás, 1987; Sumner, 1981]

Pour tout arbre T, la classe $\mathrm{Forb}(T)$ est χ-bornée.

Théorème [Scott, 1997]

Pour tout arbre T, la classe $\mathrm{Forb}^*(T)$ est χ-bornée.

Conjecture [Gyárfás, 1987; Sumner, 1981]

Pour tout arbre T, la classe $\mathrm{Forb}(T)$ est χ-bornée.

- La conjecture de Gyárfás et de Sumner reste (très) ouverte.

Théorème [Scott, 1997]

Pour tout arbre T, la classe $\mathrm{Forb}^*(T)$ est χ-bornée.

Conjecture [Gyárfás, 1987; Sumner, 1981]

Pour tout arbre T, la classe $\mathrm{Forb}(T)$ est χ-bornée.

- La conjecture de Gyárfás et de Sumner reste (très) ouverte.
- En fait, si la conjecture est vraie pour les arbres, alors elle est vraie pour les forêts (preuve : exercice).

Théorème [Scott, 1997]

Pour tout arbre T, la classe $\mathrm{Forb}^*(T)$ est χ-bornée.

Conjecture [Gyárfás, 1987; Sumner, 1981]

Pour tout arbre T, la classe $\mathrm{Forb}(T)$ est χ-bornée.

- La conjecture de Gyárfás et de Sumner reste (très) ouverte.
- En fait, si la conjecture est vraie pour les arbres, alors elle est vraie pour les forêts (preuve : exercice).
- Et si H est un graphe quelconque ? $\mathrm{Forb}(H)$ est-elle χ-bornée ?

Théorème [Erdős, 1957]

Pour tous entiers $g, k \geq 3$, il existe un graphe G ayant maille $\geq g$ et nombre chromatique $\geq k$.

Théorème [Erdős, 1957]

Pour tous entiers $g, k \geq 3$, il existe un graphe G ayant maille $\geq g$ et nombre chromatique $\geq k$.

- Si H n'est pas un forêt, alors H contient un cycle C_ℓ.

Théorème [Erdős, 1957]

Pour tous entiers $g, k \geq 3$, il existe un graphe G ayant maille $\geq g$ et nombre chromatique $\geq k$.

- Si H n'est pas un forêt, alors H contient un cycle C_ℓ.
- Donc, tous les graphes de maille $\geq \ell + 1$ sont dans Forb(H).

Théorème [Erdős, 1957]

Pour tous entiers $g, k \geq 3$, il existe un graphe G ayant maille $\geq g$ et nombre chromatique $\geq k$.

- Si H n'est pas un forêt, alors H contient un cycle C_ℓ.
- Donc, tous les graphes de maille $\geq \ell + 1$ sont dans Forb(H).
- Les graphes de maille $\geq \ell + 1$ ont le nombre de clique 2 et peuvent avoir le nombre chromatique arbitrairement grand.

Théorème [Erdős, 1957]

Pour tous entiers $g, k \geq 3$, il existe un graphe G ayant maille $\geq g$ et nombre chromatique $\geq k$.

- Si H n'est pas un forêt, alors H contient un cycle C_ℓ.
- Donc, tous les graphes de maille $\geq \ell + 1$ sont dans Forb(H).
- Les graphes de maille $\geq \ell + 1$ ont le nombre de clique 2 et peuvent avoir le nombre chromatique arbitrairement grand.
- Donc, Forb(H) n'est par χ-bornée.

Théorème [Erdős, 1957]

Pour tous entiers $g, k \geq 3$, il existe un graphe G ayant maille $\geq g$ et nombre chromatique $\geq k$.

- Si H n'est pas un forêt, alors H contient un cycle C_ℓ.
- Donc, tous les graphes de maille $\geq \ell + 1$ sont dans Forb(H).
- Les graphes de maille $\geq \ell + 1$ ont le nombre de clique 2 et peuvent avoir le nombre chromatique arbitrairement grand.
- Donc, Forb(H) n'est par χ-bornée.

Conjecture [Gyárfás, 1987; Sumner, 1981]

Pour tout arbre T, la classe Forb(T) est χ-bornée.

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

- C'est probablement faux (trouvez un contre-exemple !).

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

---

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

- C'est probablement faux (trouvez un contre-exemple !).
- Mais si c'est vrai, c'est probablement très difficile à démontrer.

Conjecture [Esperet]

Toute classe de graphes χ-bornée est polynomialement χ-bornée.[a]

[a] Une classe $\mathcal{G}$ est *polynomialement χ-bornée* s'il existe un polynôme P tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ satisfait $\chi(G) \leq P(\omega(G))$.

- C'est probablement faux (trouvez un contre-exemple !).
- Mais si c'est vrai, c'est probablement très difficile à démontrer.
    - Il y a pas mal de théorèmes pas de tout triviaux établissant des bornes exponentielles ou pire.

Conjecture [Esperet]

Pour toute classe héréditaire $\mathcal{G}$, les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\mathcal{G}$ est χ-bornée;

(ii) il existe un entier $c > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ sans triangle est c-colorable.

Conjecture [Esperet]

Pour toute classe héréditaire $\mathcal{G}$, les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\mathcal{G}$ est χ-bornée;

(ii) il existe un entier $c > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ sans triangle est c-colorable.

- (ii) est équivalent à l'énoncé suivant : "$\mathcal{G} \cap \mathrm{Forb}(K_3)$ est χ-bornée".

Conjecture [Esperet]

Pour toute classe héréditaire $\mathcal{G}$, les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\mathcal{G}$ est χ-bornée;

(ii) il existe un entier $c > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ sans triangle est c-colorable.

- (ii) est équivalent à l'énoncé suivant : "$\mathcal{G} \cap \mathrm{Forb}(K_3)$ est χ-bornée".
- (i) implique (ii) trivialement.

Conjecture [Esperet]

Pour toute classe héréditaire $\mathcal{G}$, les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\mathcal{G}$ est χ-bornée;

(ii) il existe un entier $c > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ sans triangle est c-colorable.

- (ii) est équivalent à l'énoncé suivant : "$\mathcal{G} \cap \mathrm{Forb}(K_3)$ est χ-bornée".
- (i) implique (ii) trivialement.
- Souvent (pour des classes concrètes), (ii) n'est pas plus facile à démontrer que (i).

Conjecture [Esperet]

Pour toute classe héréditaire $\mathcal{G}$, les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\mathcal{G}$ est χ-bornée;

(ii) il existe un entier $c > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ sans triangle est c-colorable.

- (ii) est équivalent à l'énoncé suivant : "$\mathcal{G} \cap \mathrm{Forb}(K_3)$ est χ-bornée".
- (i) implique (ii) trivialement.
- Souvent (pour des classes concrètes), (ii) n'est pas plus facile à démontrer que (i).
  - Mais pas toujours !
    - Par exemple, les graphes sans trou impaire et sans triangle sont bipartis ; donc, la classe de tels graphes est χ-bornée.
    - La classe des graphes sans trou impaire est également χ-bornée (Scott, Seymour, 2016), mais c'est un théorème sérieux.

Conjecture [Esperet]

Pour toute classe héréditaire $\mathcal{G}$, les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\mathcal{G}$ est χ-bornée;

(ii) il existe un entier $c > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{G}$ sans triangle est c-colorable.

- (ii) est équivalent à l'énoncé suivant : "$\mathcal{G} \cap \mathrm{Forb}(K_3)$ est χ-bornée".
- (i) implique (ii) trivialement.
- Souvent (pour des classes concrètes), (ii) n'est pas plus facile à démontrer que (i).
  - Mais pas toujours !
    - Par exemple, les graphes sans trou impaire et sans triangle sont bipartis ; donc, la classe de tels graphes est χ-bornée.
    - La classe des graphes sans trou impaire est également χ-bornée (Scott, Seymour, 2016), mais c'est un théorème sérieux.
  - Et dans le cas général...?

C’est tout !

Merci.