

Autour de la convexité combinatoire - partie II

Xavier Goaoc

École des Mines de Nancy - LORIA

Université de Lorraine

EJCIM 2020

8-19 juin

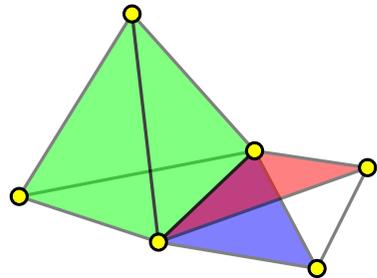
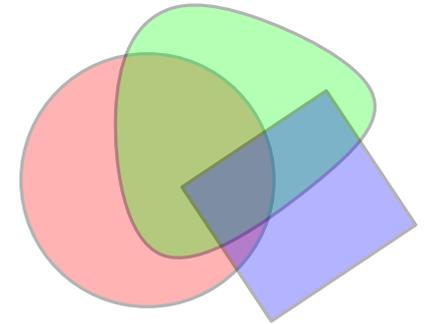
Édition confinée



On a commencé par de la **convexité combinatoire**.

Notions de base, **Carathéodory, Radon, Helly**.

Applications géométriques et algorithmiques.



Allons maintenant vers des **structures mathématiques** voisines.

Complexes simpliciaux géométriques (3/4).

Complexes simpliciaux abstraits (1/3).

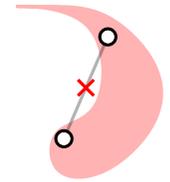
1. Quelques rappels

Géométrie affine dans \mathbb{R}^d , point de vue "Cartésien".

Points $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$

Géométrie affine dans \mathbb{R}^d , point de vue "Cartésien".

Points $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$



$X \subseteq \mathbb{R}^d$ est **convexe** \Leftrightarrow X contient tout segment entre deux points de X .

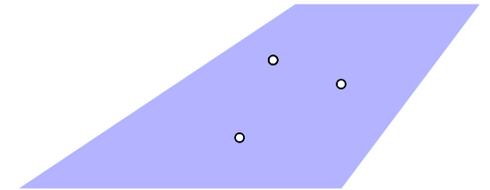
Géométrie affine dans \mathbb{R}^d , point de vue "Cartésien".

Points $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$



$X \subseteq \mathbb{R}^d$ est **convexe** \Leftrightarrow X contient tout segment entre deux points de X .

Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.
droite ($d = 2$), plan ($d = 3$), ...



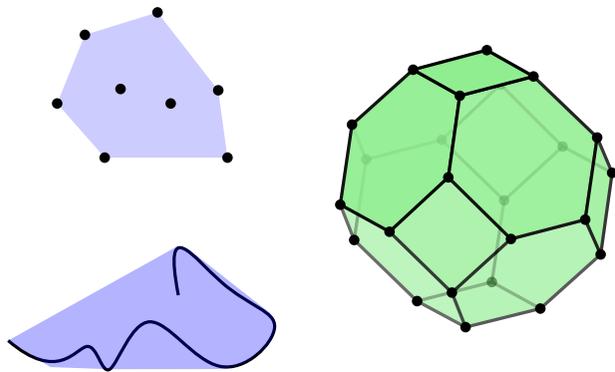
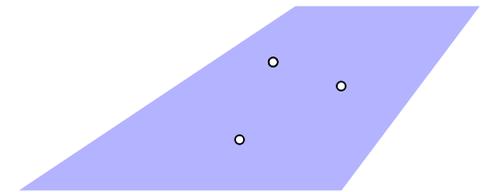
Géométrie affine dans \mathbb{R}^d , point de vue "Cartésien".

Points $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$



$X \subseteq \mathbb{R}^d$ est **convexe** \Leftrightarrow X contient tout segment entre deux points de X .

Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.
droite ($d = 2$), plan ($d = 3$), ...



Opérateur d'enveloppe **convexe**.

$$\text{conv}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i : n \in \mathbb{N}^*, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

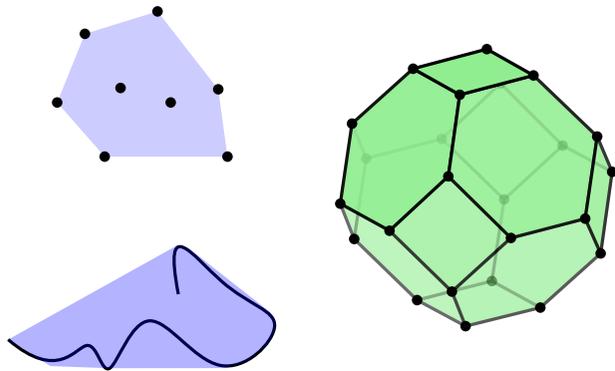
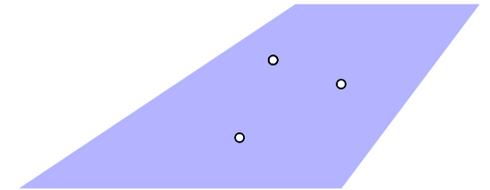
Géométrie affine dans \mathbb{R}^d , point de vue "Cartésien".

Points $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$



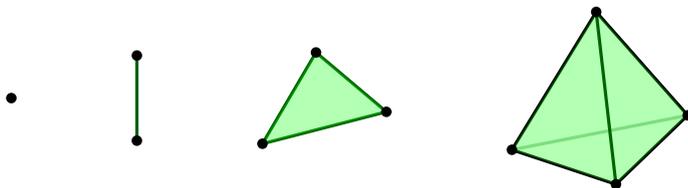
$X \subseteq \mathbb{R}^d$ est **convexe** \Leftrightarrow X contient tout segment entre deux points de X .

Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.
droite ($d = 2$), plan ($d = 3$), ...



Opérateur d'enveloppe **convexe**.

$$\text{conv}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i : n \in \mathbb{N}^*, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$



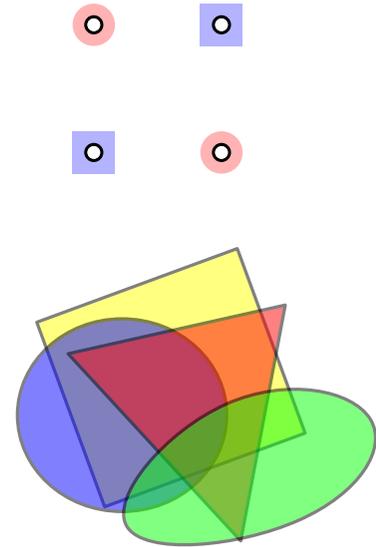
Les **simplexes**.

On a vu quelques raisonnements "en dimension quelconque" à partir de...

Carathéodory : $p \in \text{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p .

Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d dont l'intersection est vide contient $\leq d + 1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

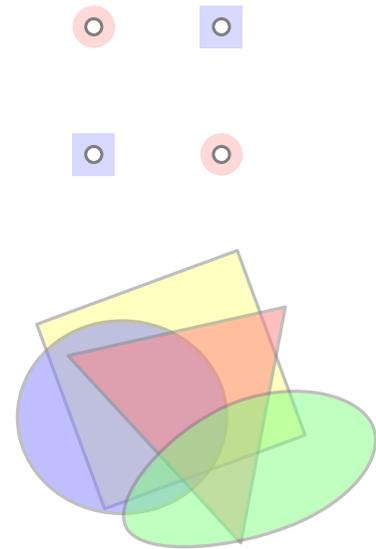


On a vu quelques raisonnements "en dimension quelconque" à partir de...

Carathéodory : $p \in \text{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p .

Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d dont l'intersection est vide contient $\leq d + 1$ membres dont l'intersection est déjà vide.



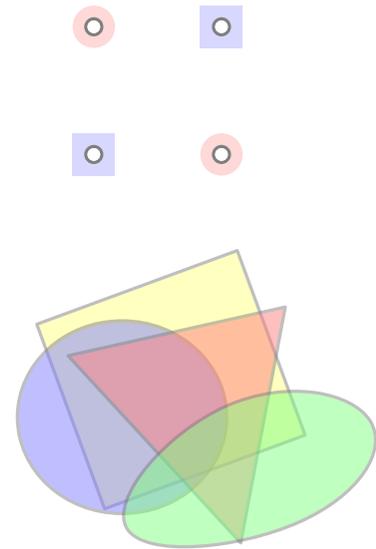
Cette séance : Des graphes... en dimension quelconque.

On a vu quelques raisonnements "en dimension quelconque" à partir de...

Carathéodory : $p \in \text{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p .

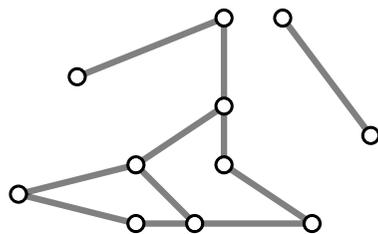
Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d dont l'intersection est vide contient $\leq d + 1$ membres dont l'intersection est déjà vide.



Cette séance :

Des graphes... en dimension quelconque.

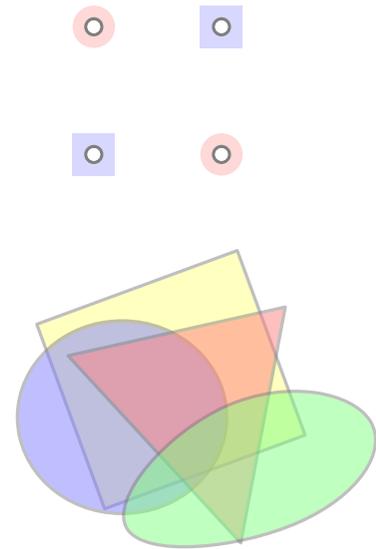


On a vu quelques raisonnements "en dimension quelconque" à partir de...

Carathéodory : $p \in \text{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p .

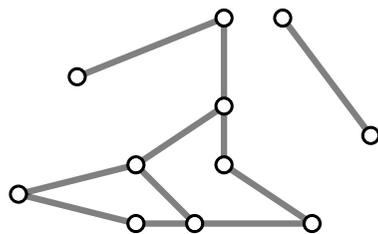
Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d dont l'intersection est vide contient $\leq d + 1$ membres dont l'intersection est déjà vide.



Cette séance :

Des graphes... en dimension quelconque.



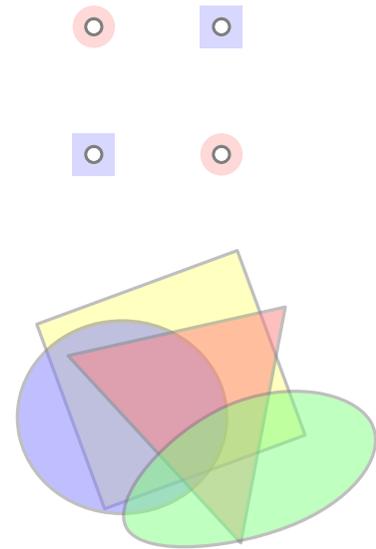
$G = (V, E)$ avec V fini
et $E \subseteq \binom{V}{2}$.

On a vu quelques raisonnements "en dimension quelconque" à partir de...

Carathéodory : $p \in \text{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p .

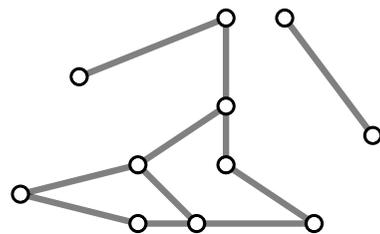
Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d dont l'intersection est vide contient $\leq d + 1$ membres dont l'intersection est déjà vide.



Cette séance :

Des graphes... en dimension quelconque.



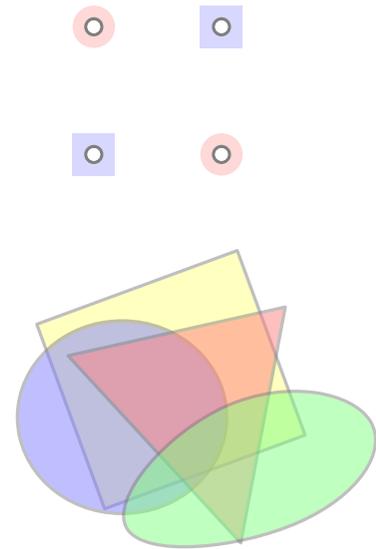
$$\Leftrightarrow G = (V, E) \text{ avec } V \text{ fini} \\ \text{et } E \subseteq \binom{V}{2}.$$

On a vu quelques raisonnements "en dimension quelconque" à partir de...

Carathéodory : $p \in \text{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p .

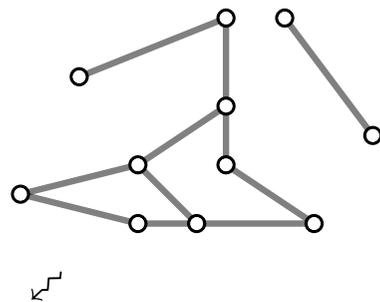
Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d dont l'intersection est vide contient $\leq d + 1$ membres dont l'intersection est déjà vide.



Cette séance :

Des graphes... en dimension quelconque.



$$\Leftrightarrow G = (V, E) \text{ avec } V \text{ fini} \\ \text{et } E \subseteq \binom{V}{2}.$$

Complexes simpliciaux
géométriques

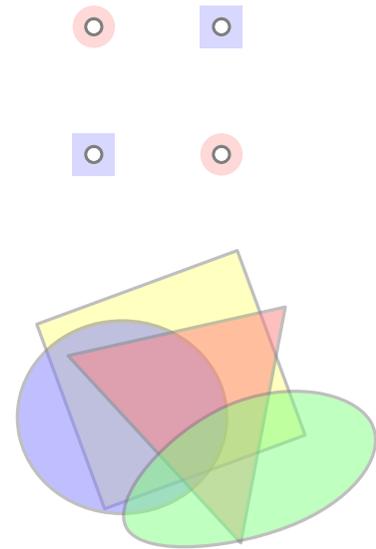
Topologie

On a vu quelques raisonnements "en dimension quelconque" à partir de...

Carathéodory : $p \in \text{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p .

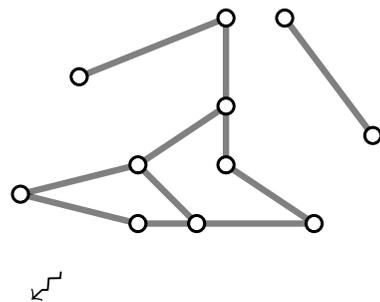
Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d dont l'intersection est vide contient $\leq d + 1$ membres dont l'intersection est déjà vide.



Cette séance :

Des graphes... en dimension quelconque.



$$\Leftrightarrow G = (V, E) \text{ avec } V \text{ fini} \\ \text{et } E \subseteq \binom{V}{2}.$$

Complexes simpliciaux
géométriques

Topologie

Complexes simpliciaux
abstraites

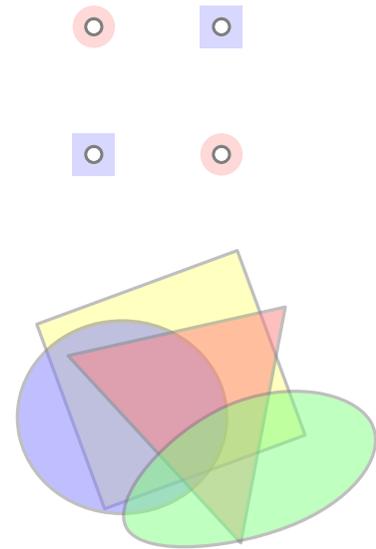
Systèmes d'ensembles finis

On a vu quelques raisonnements "en dimension quelconque" à partir de...

Carathéodory : $p \in \text{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p .

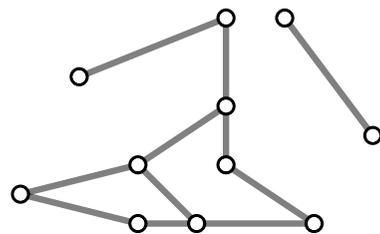
Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d dont l'intersection est vide contient $\leq d + 1$ membres dont l'intersection est déjà vide.



Cette séance :

Des graphes... en dimension quelconque.



$$\Leftrightarrow G = (V, E) \text{ avec } V \text{ fini} \\ \text{et } E \subseteq \binom{V}{2}.$$

Complexes simpliciaux
géométriques

Topologie

\Leftrightarrow

Complexes simpliciaux
abstraites

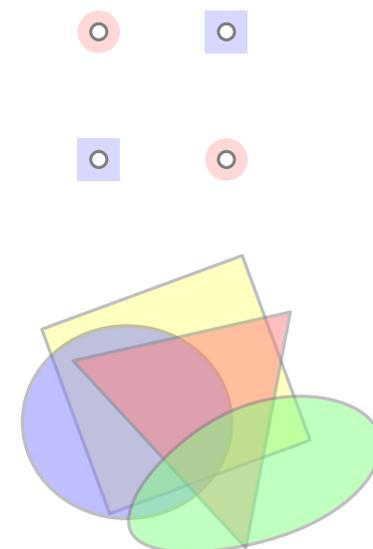
Systèmes d'ensembles finis

On a vu quelques raisonnements "en dimension quelconque" à partir de...

Carathéodory : $p \in \text{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p .

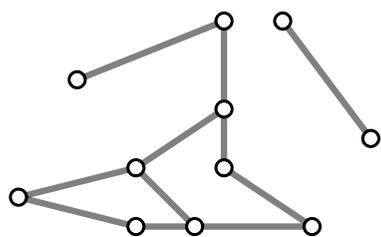
Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d dont l'intersection est vide contient $\leq d + 1$ membres dont l'intersection est déjà vide.



Cette séance :

Des graphes... en dimension quelconque.



$$\Leftrightarrow G = (V, E) \text{ avec } V \text{ fini} \\ \text{et } E \subseteq \binom{V}{2}.$$

Complexes simpliciaux
géométriques

\Leftrightarrow

Complexes simpliciaux
abstraites

Topologie



convexité combinatoire



Systèmes d'ensembles finis

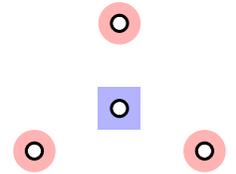
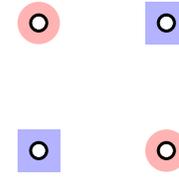
$1\frac{1}{2}$. Mise en bouche

Radon. Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Radon ($d = 2$). Tout ensemble de $n \geq 4$ points de \mathbb{R}^2 contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Radon ($d = 2$). Tout ensemble de 4 points de \mathbb{R}^2 contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

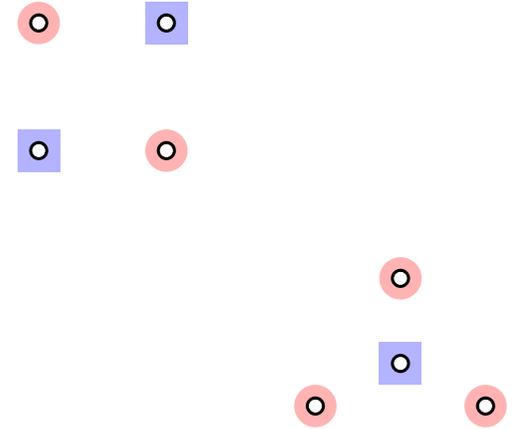
Radon ($d = 2$). Tout ensemble de 4 points de \mathbb{R}^2 contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.



Radon ($d = 2$). Tout ensemble de 4 points de \mathbb{R}^2 contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.



Radon ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un autre sommet.



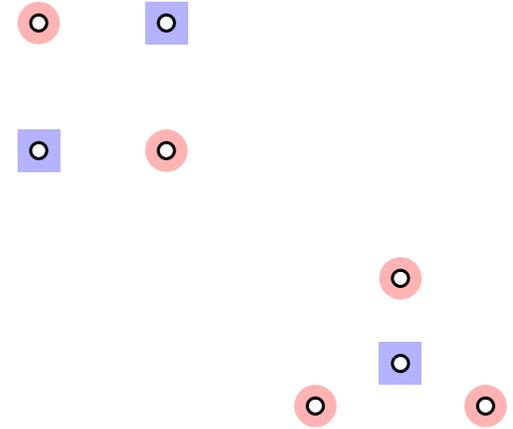
Radon ($d = 2$). Tout ensemble de 4 points de \mathbb{R}^2 contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.



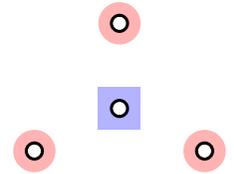
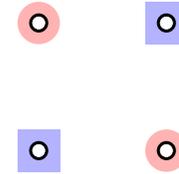
Radon ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un autre sommet.

↑ Généralisation naturelle ?

Radon "topologique" ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un point.



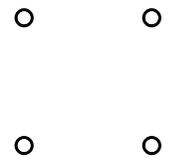
Radon ($d = 2$). Tout ensemble de 4 points de \mathbb{R}^2 contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.



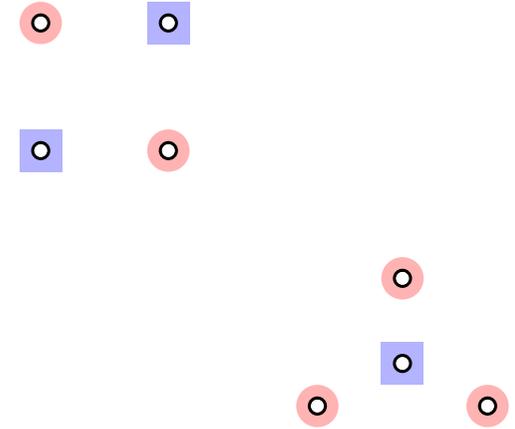
Radon ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un autre sommet.

↑ Généralisation naturelle ?

Radon "topologique" ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un point.



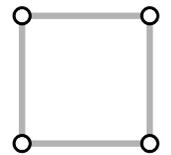
Radon ($d = 2$). Tout ensemble de 4 points de \mathbb{R}^2 contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.



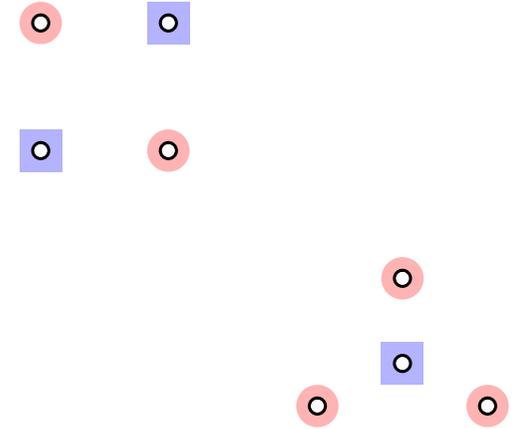
Radon ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un autre sommet.

↑ Généralisation naturelle ?

Radon "topologique" ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un point.



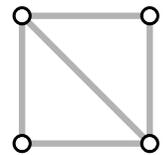
Radon ($d = 2$). Tout ensemble de 4 points de \mathbb{R}^2 contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.



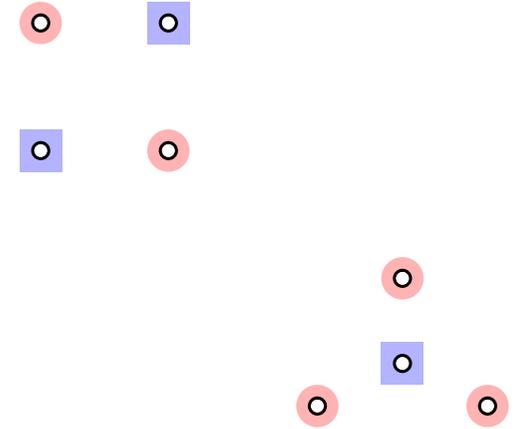
Radon ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un autre sommet.

↑ Généralisation naturelle ?

Radon "topologique" ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un point.



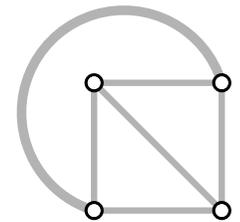
Radon ($d = 2$). Tout ensemble de 4 points de \mathbb{R}^2 contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.



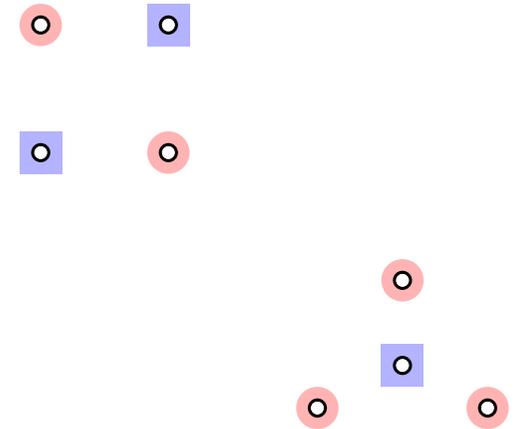
Radon ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un autre sommet.

↑ Généralisation naturelle ?

Radon "topologique" ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un point.



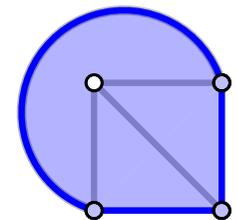
Radon ($d = 2$). Tout ensemble de 4 points de \mathbb{R}^2 contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.



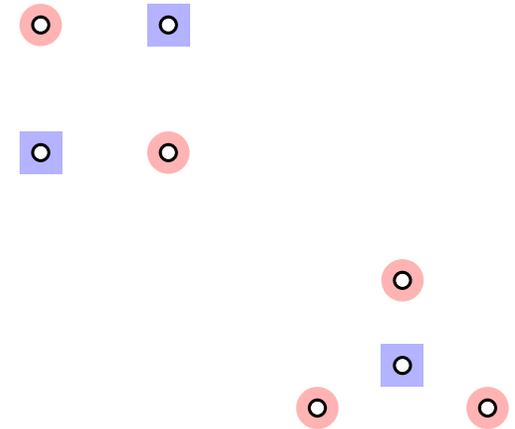
Radon ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un autre sommet.

↑ Généralisation naturelle ?

Radon "topologique" ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un point.



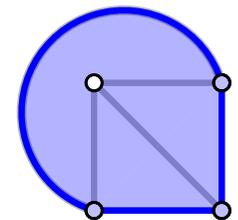
Radon ($d = 2$). Tout ensemble de 4 points de \mathbb{R}^2 contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.



Radon ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un autre sommet.

↑ Généralisation naturelle ?

Radon "topologique" ($d = 2$). Tout dessin de K_4 dans le plan par arêtes droites contient deux arêtes sécantes ou un 3-cycle entourant un point.



Radon "topologique" en dimension d ?

2. Complexes simpliciaux géométriques

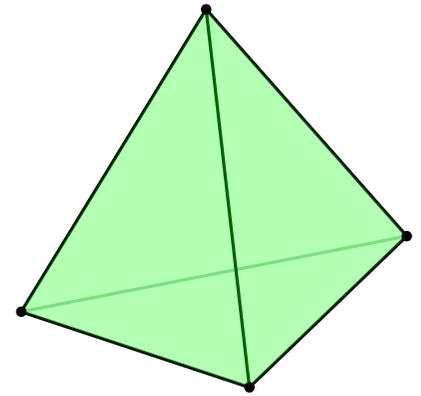
Simplexe, face, complexe simplicial géométrique, dimension.

Assemblages "propres" de simplexes.

Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.

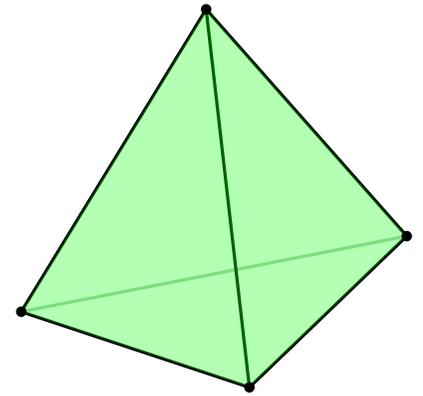


Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.

Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .

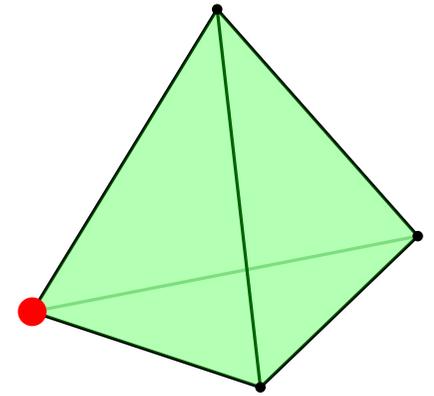


Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.

Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .

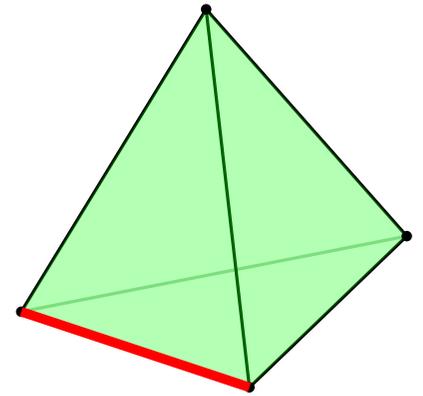


Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.

Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .

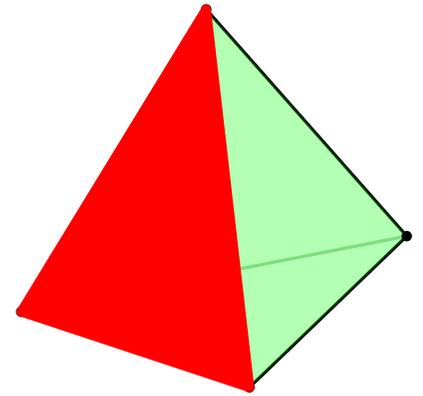


Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.

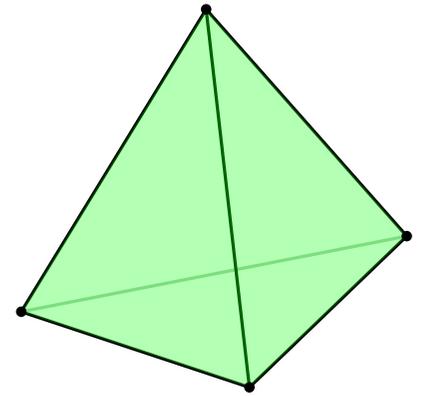
Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .

**Complexe simplicial
géométrique de \mathbb{R}^d** ^{def} \equiv

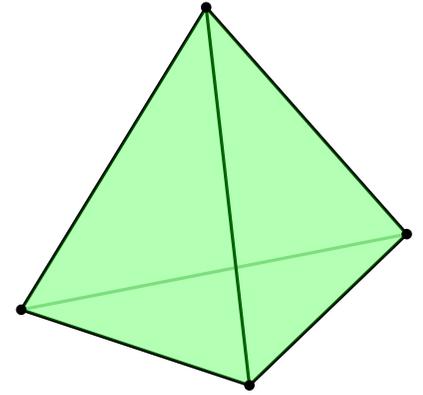
Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

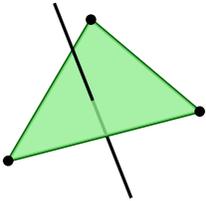
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d ^{def} \equiv

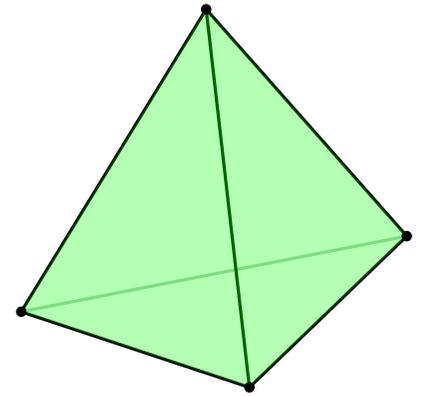
Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

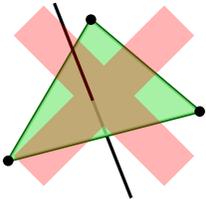
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d ^{def} \equiv

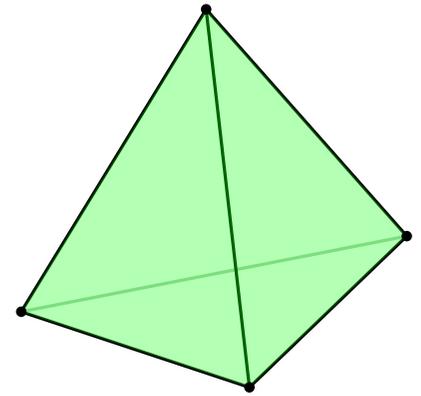
Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

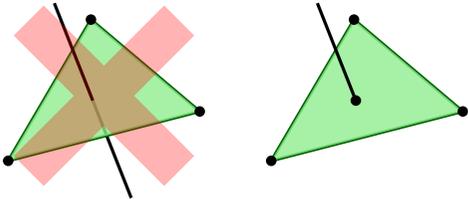
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d ^{def}

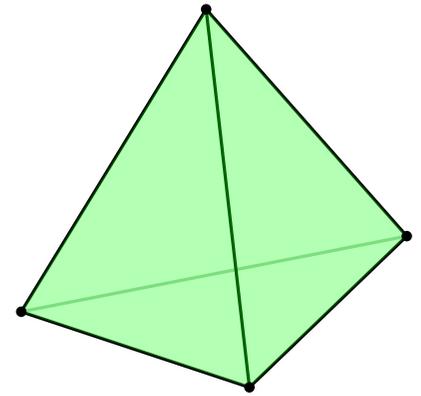
Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

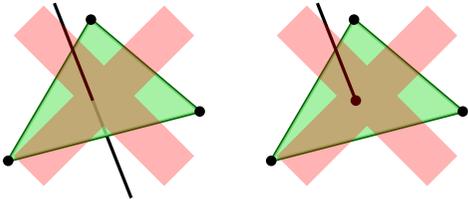
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d ^{def} \equiv

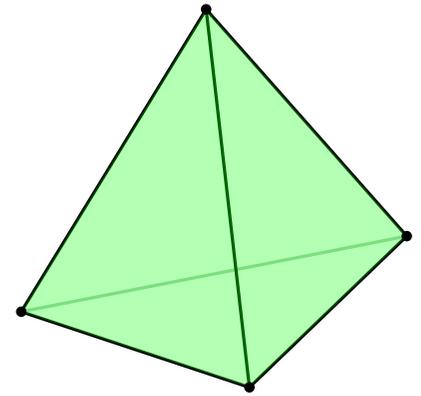
Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

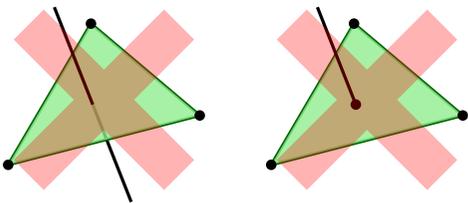
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



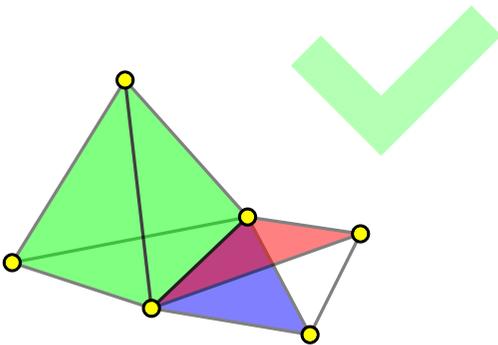
Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d ^{def} \equiv

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

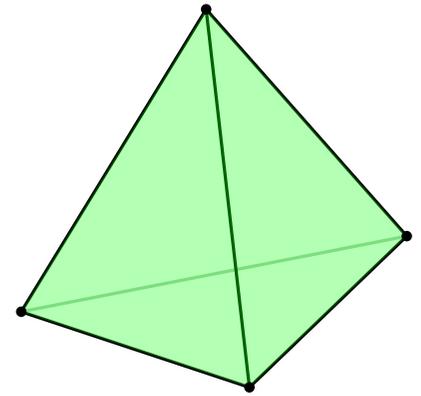
- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .



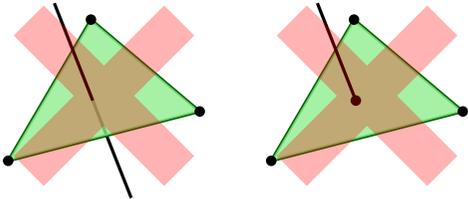
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



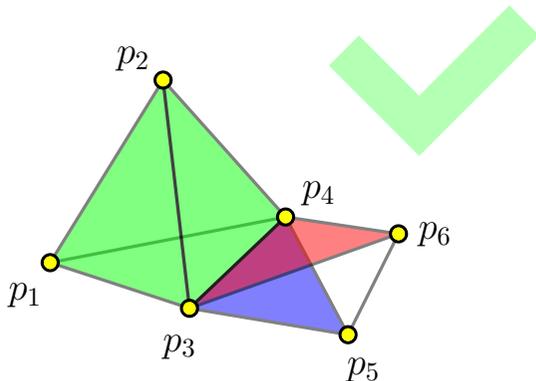
Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d ^{def} \equiv

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

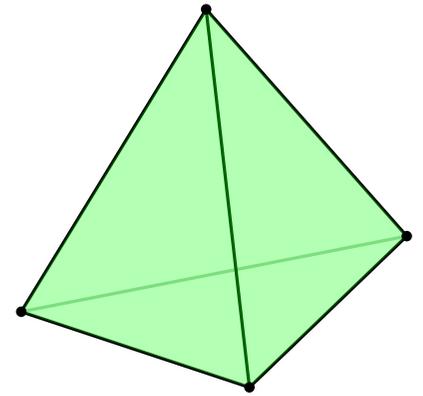
- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .



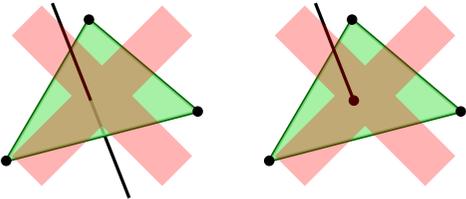
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d

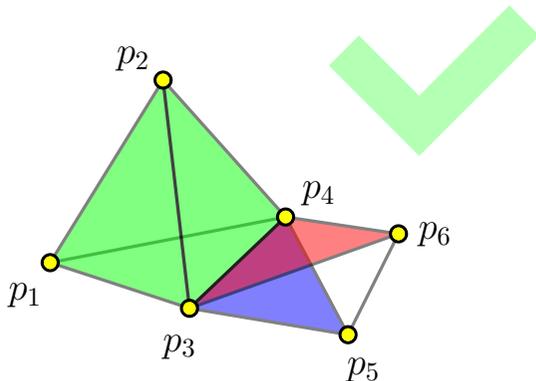
^{def} \equiv

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

(i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

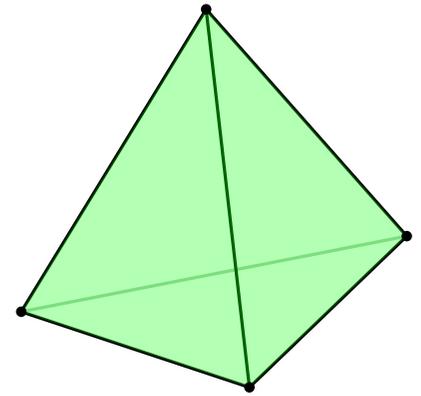
$$\mathcal{K} = \{\text{conv}(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})\},$$



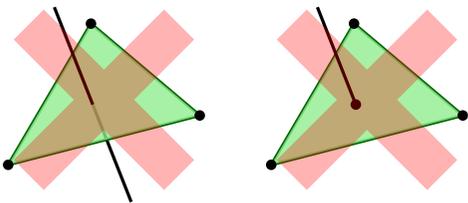
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .

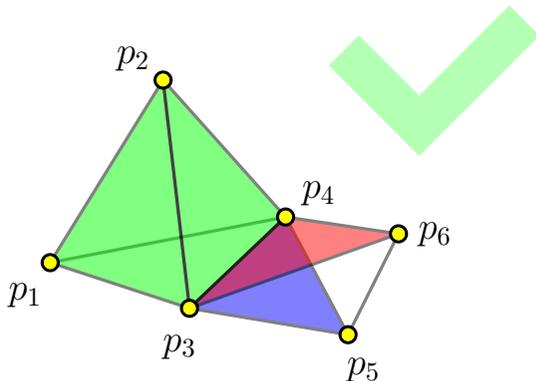


Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d ^{def} \equiv

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

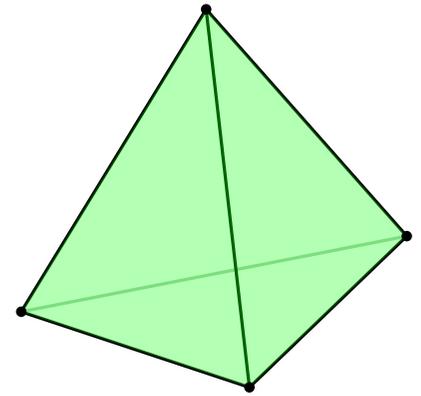
$$\mathcal{K} = \{p_1 p_2 p_3 p_4,$$



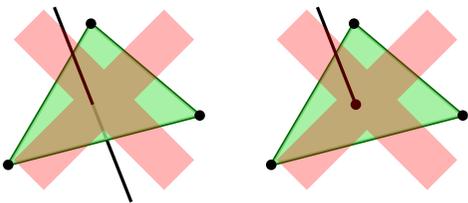
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



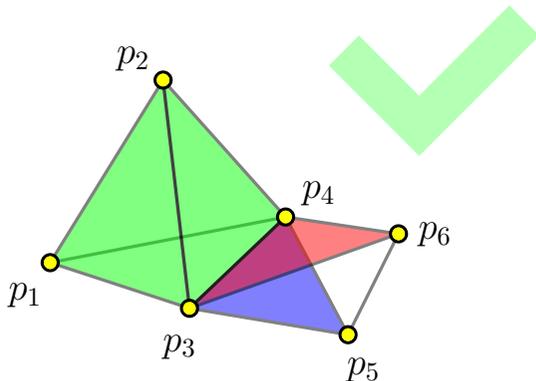
Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d ^{def} \equiv

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

(i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

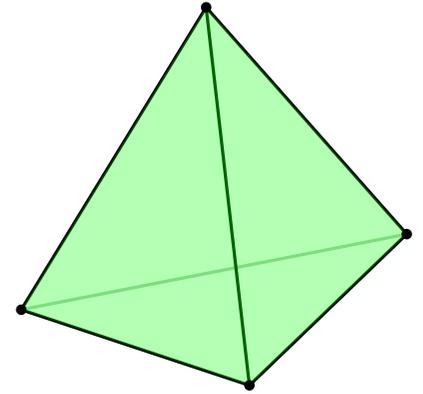
$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6,$$



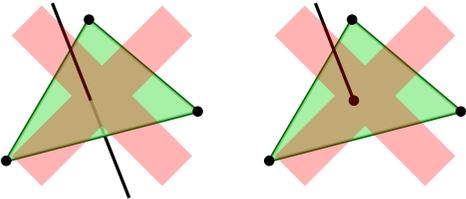
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .

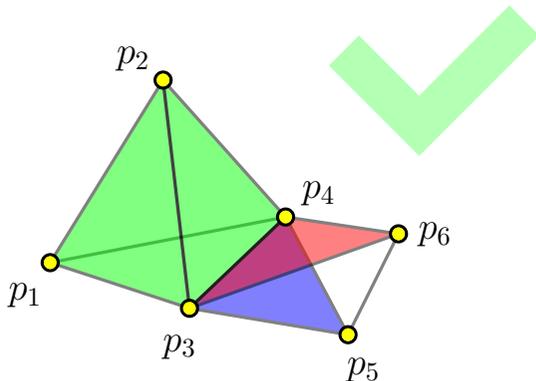


Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d ^{def} \equiv

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

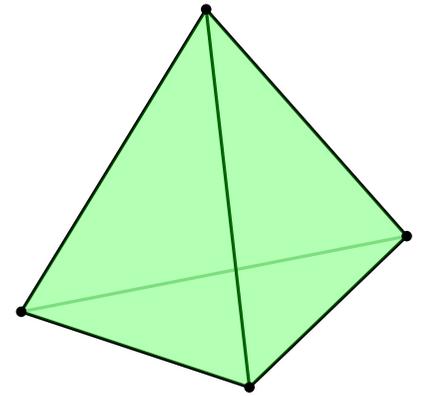
$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4\}$$



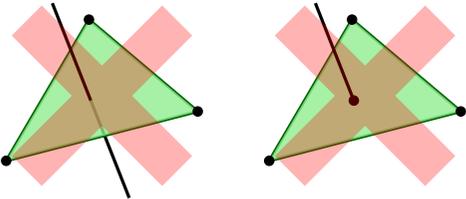
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .

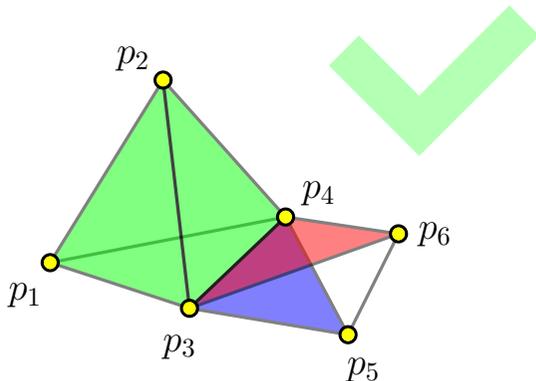


Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d ^{def} \equiv

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

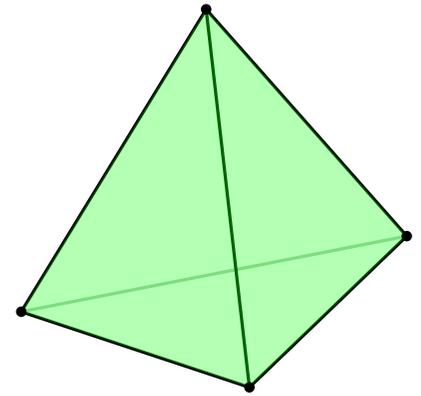
$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6\}$$



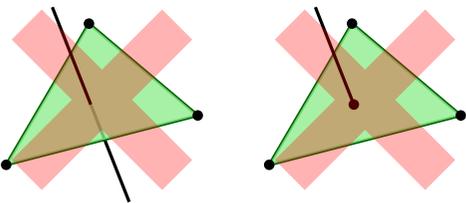
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d

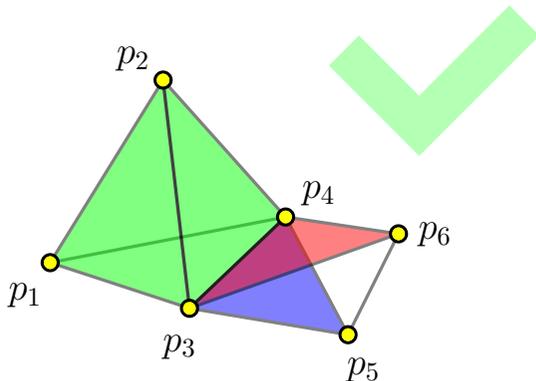
^{def}

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

(i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

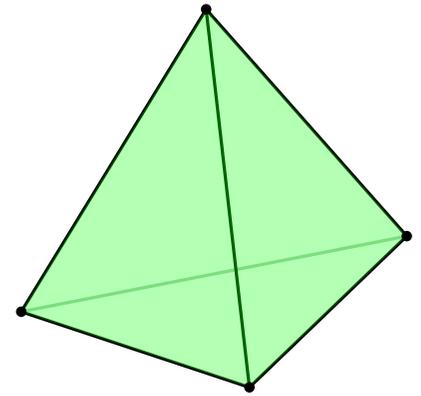
$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$$



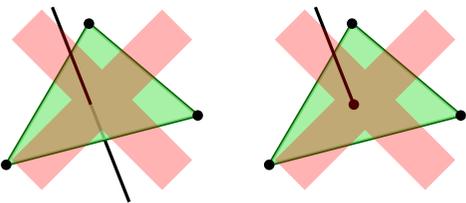
Simplexe ^{def} : $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de P ^{def} : **sommets** de $\text{conv}(P)$.



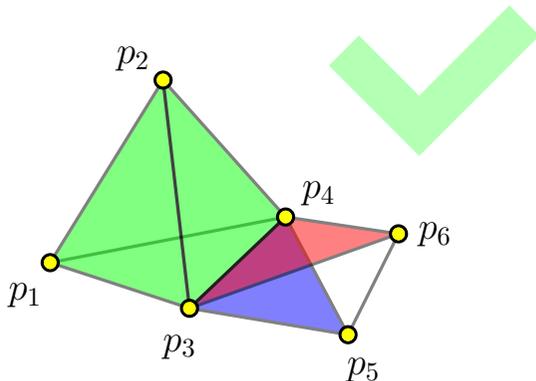
Face de σ ^{def} : $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d ^{def} \equiv

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

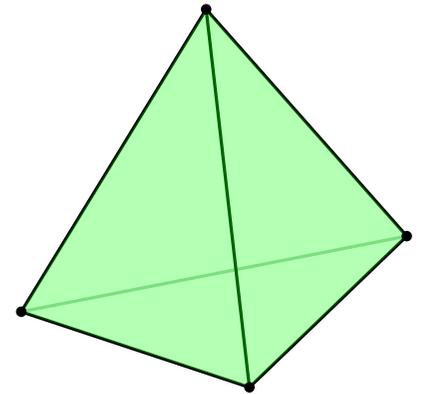


$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \emptyset\}$$

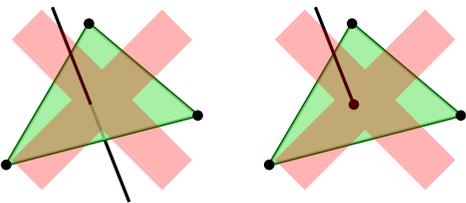
Simplexe $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de $P \stackrel{\text{def}}{:}$ **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de $\sigma \stackrel{\text{def}}{:}$ $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .

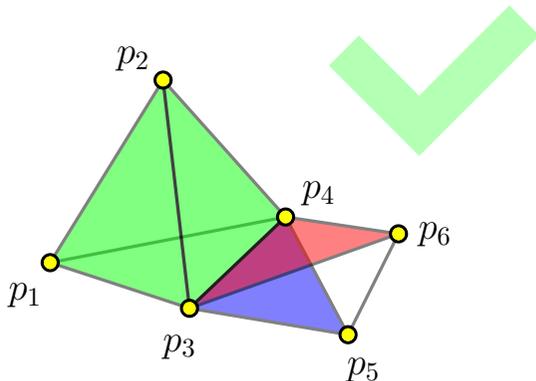


Complexe simplicial géométrique de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{K}$

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \emptyset\}$$

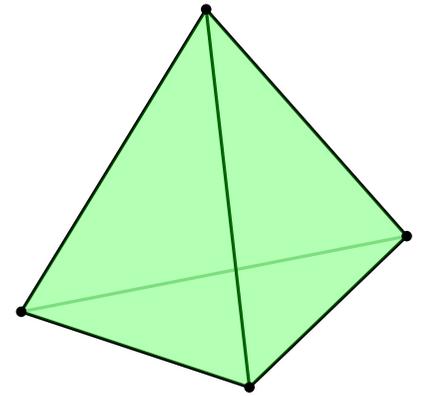


Dimension d'un simplexe $\stackrel{\text{def}}{=} \#$ sommets $- 1$.

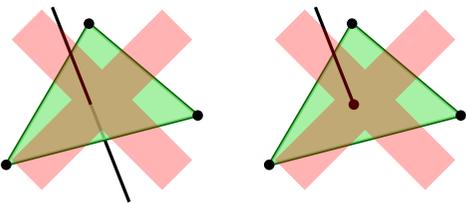
Simplexe $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de $P \stackrel{\text{def}}{:}$ **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de $\sigma \stackrel{\text{def}}{:}$ $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



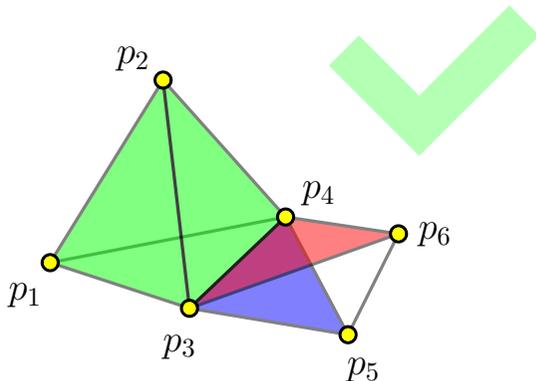
Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d

$\stackrel{\text{def}}{=}$

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \emptyset\}$$



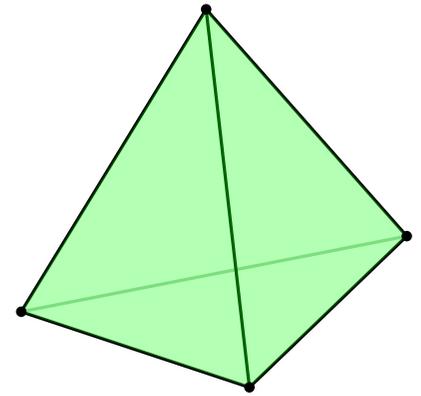
Dimension d'un simplexe $\stackrel{\text{def}}{=} \#$ sommets $- 1$.

$$\dim(\mathcal{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\sigma \in \mathcal{K}} \dim(\sigma)$$

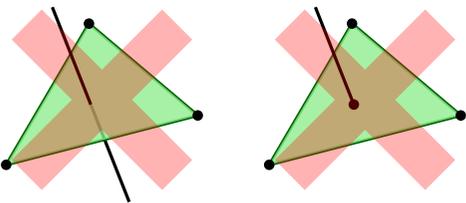
Simplexe $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\text{conv}(P)$ avec P affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'**enveloppe affine** des autres.

Les points de $P \stackrel{\text{def}}{:}$ **sommets** de $\text{conv}(P)$.



Face de $\sigma \stackrel{\text{def}}{:}$ $\text{conv}(Q)$ avec $Q \subseteq$ sommets de σ .



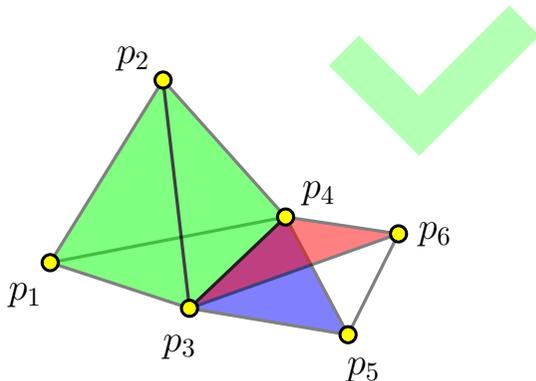
Complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d

$\stackrel{\text{def}}{=}$

Ensemble \mathcal{K} de simplexes de \mathbb{R}^d t. q.

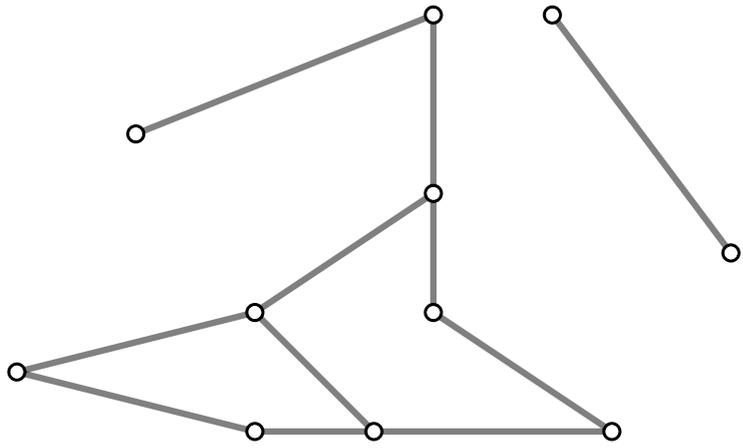
- (i) $\forall A \in \mathcal{K}, \forall B$ face de $A, B \in \mathcal{K}$.
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{K}, A \cap B =$ face de A .

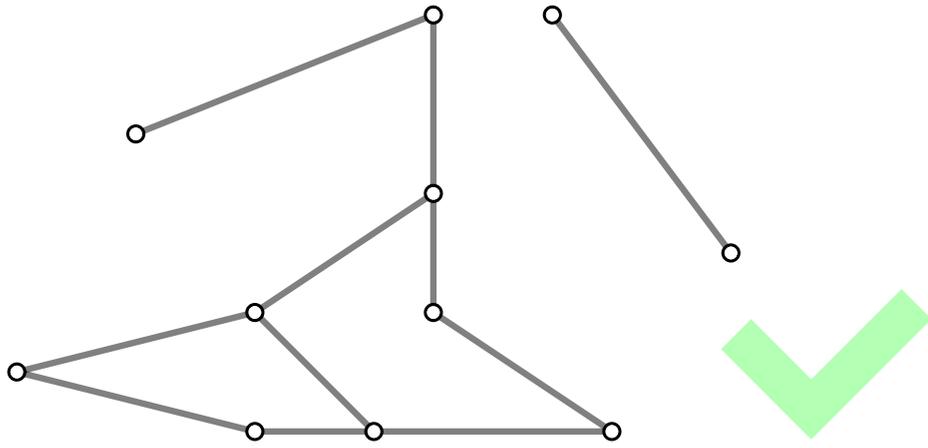
$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \emptyset\}$$

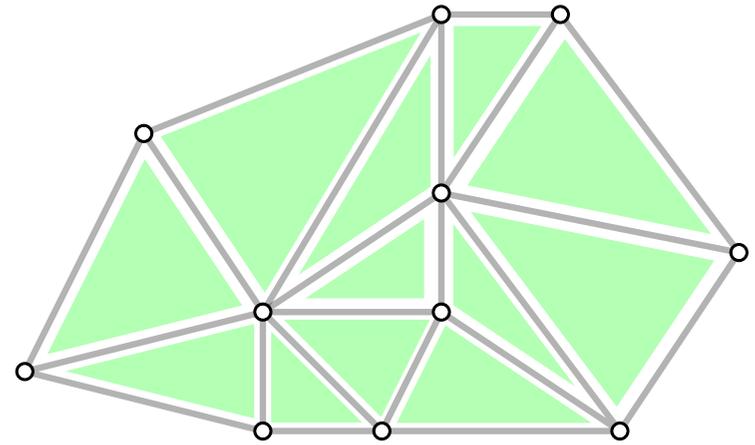
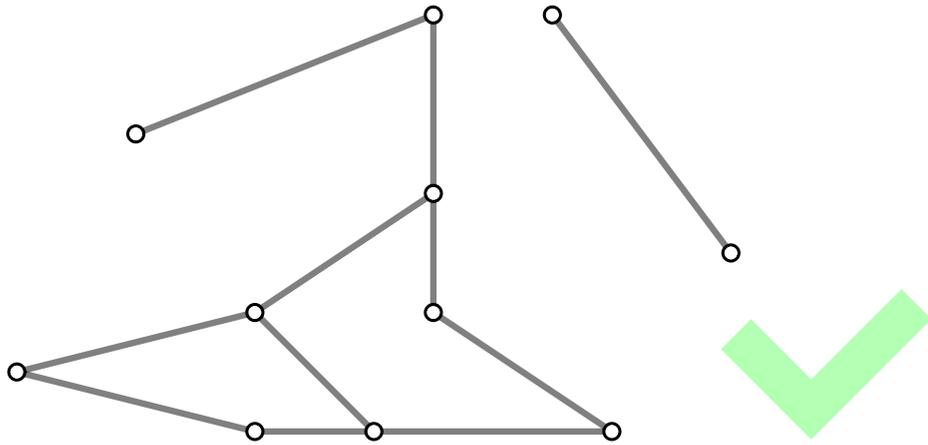


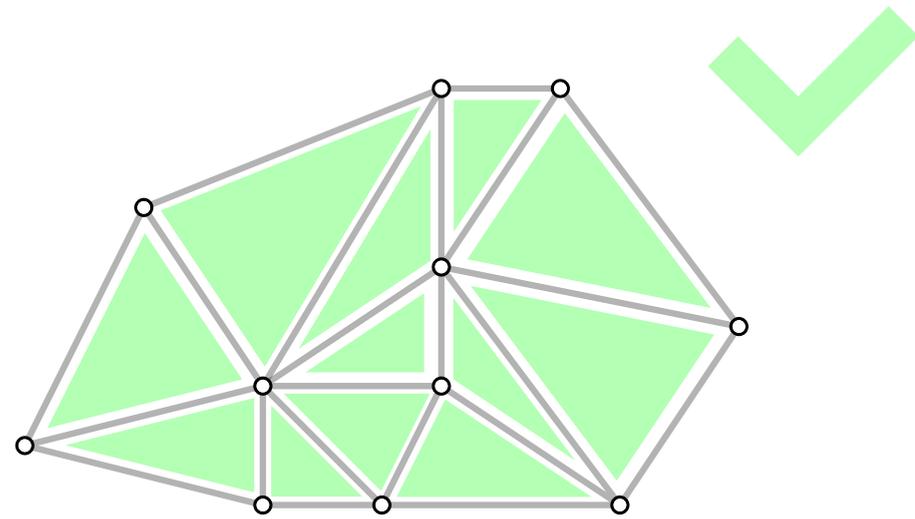
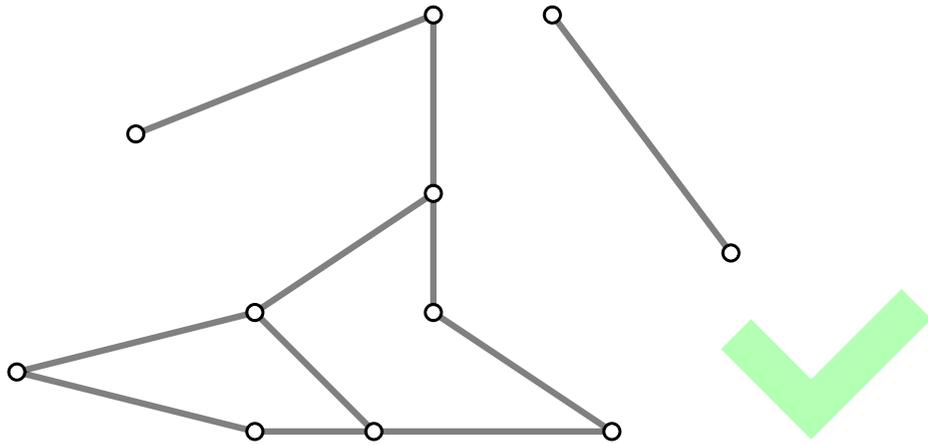
Dimension d'un simplexe $\stackrel{\text{def}}{=} \#$ sommets $- 1$.

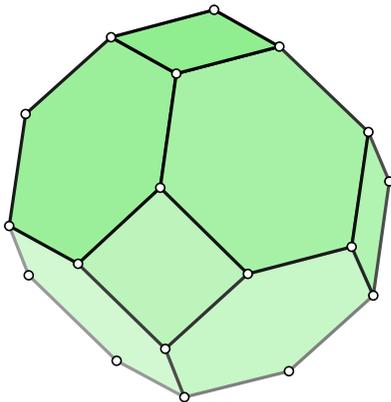
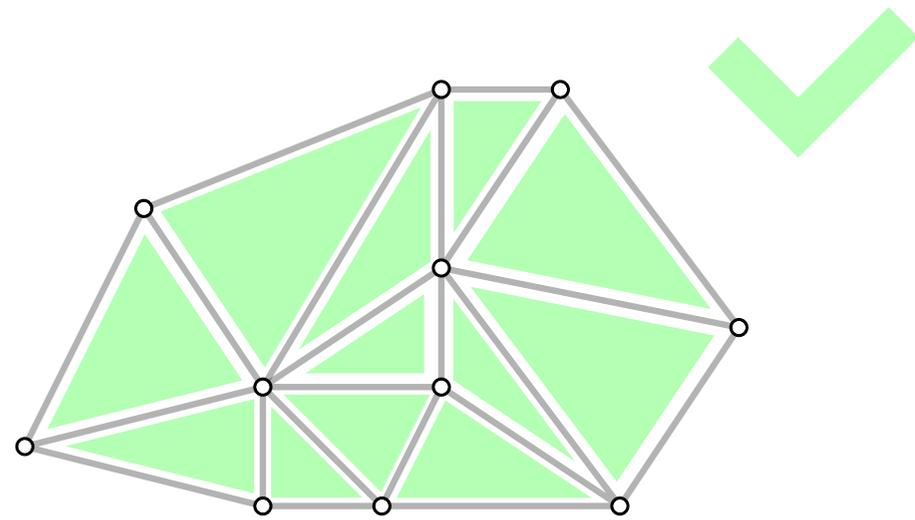
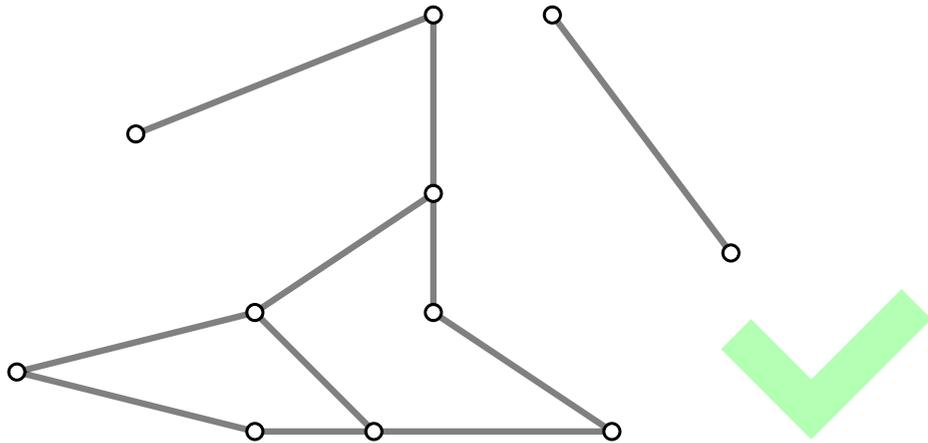
$$\dim(\mathcal{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\sigma \in \mathcal{K}} \dim(\sigma) \leq d$$

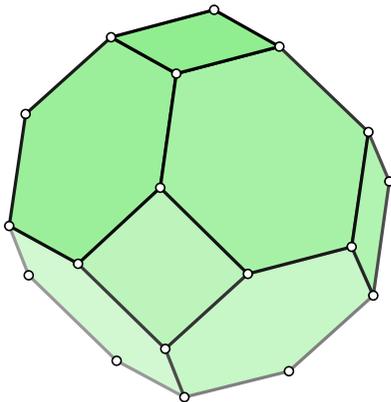
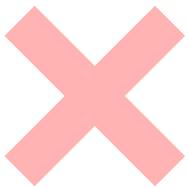
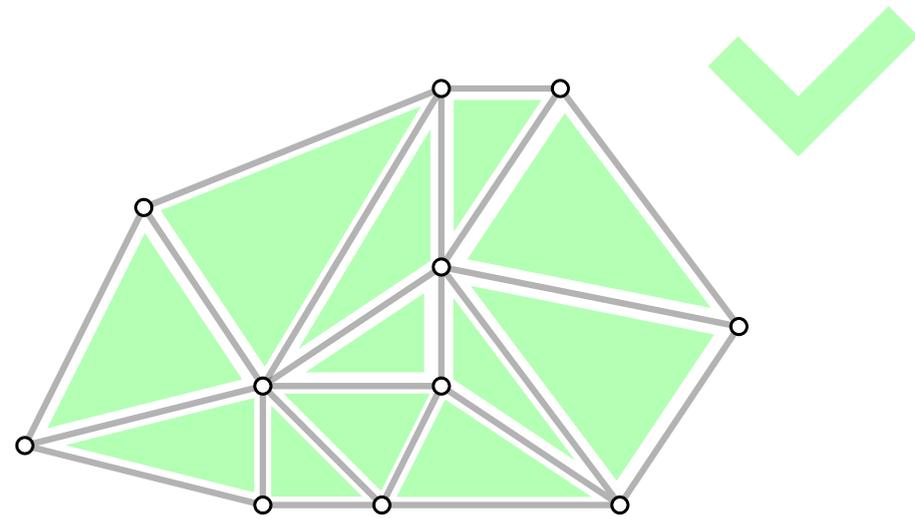
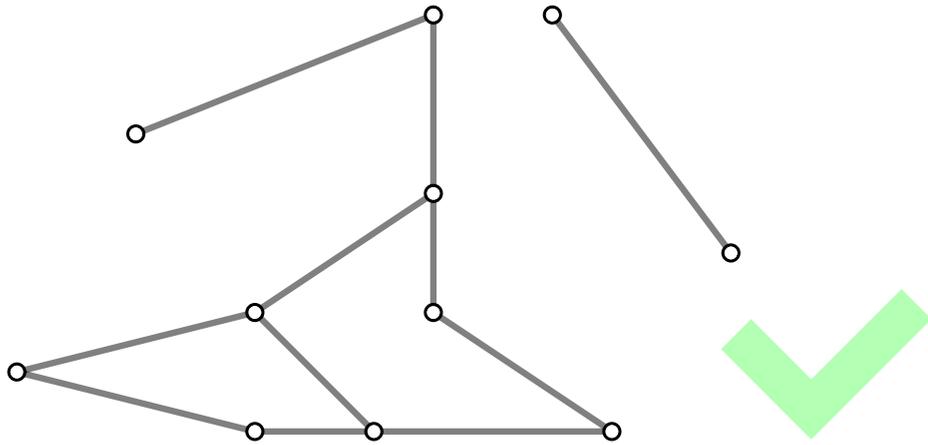


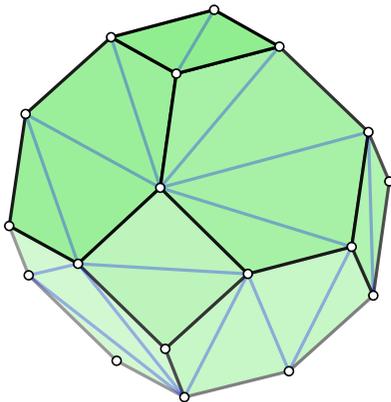
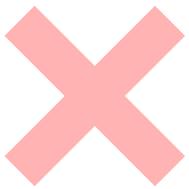
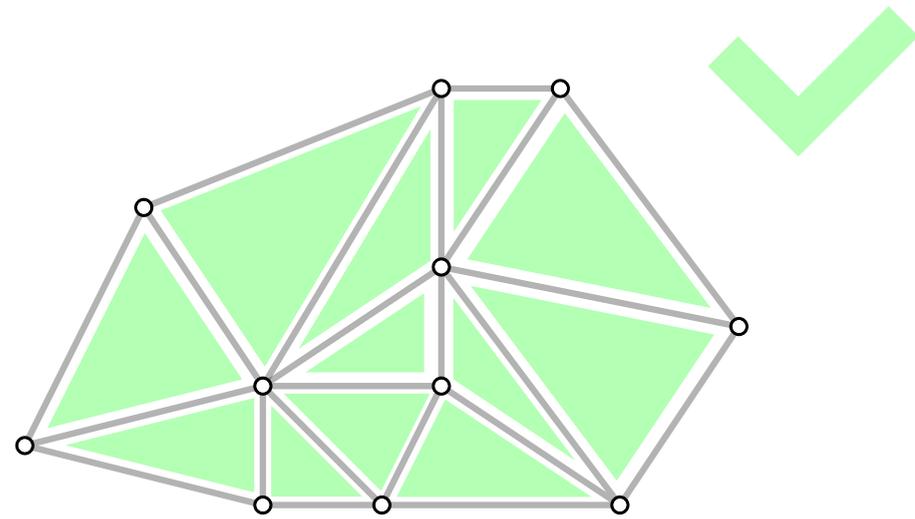
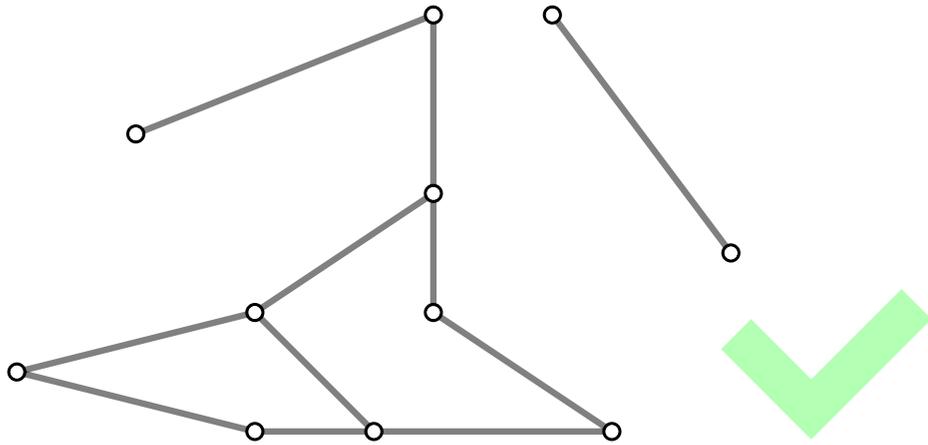


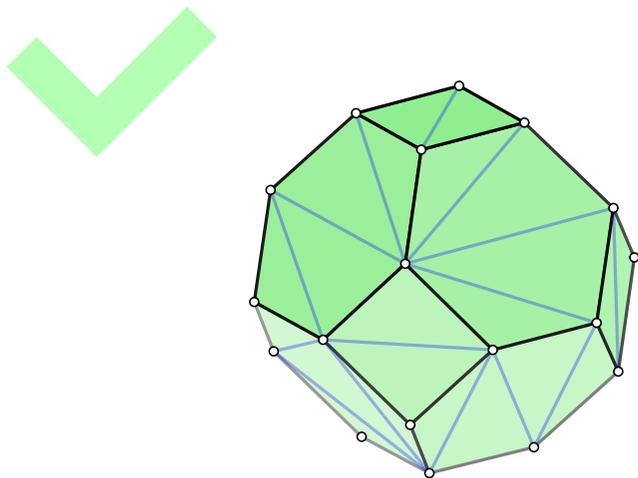
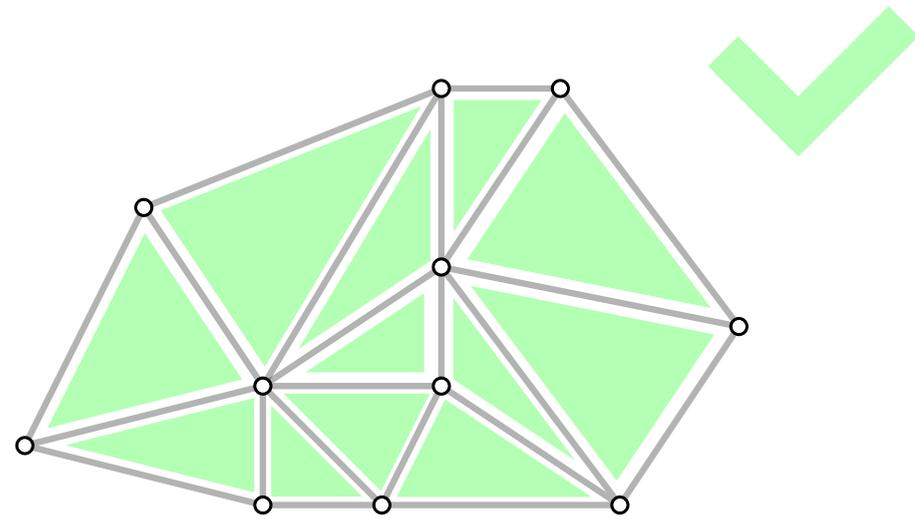
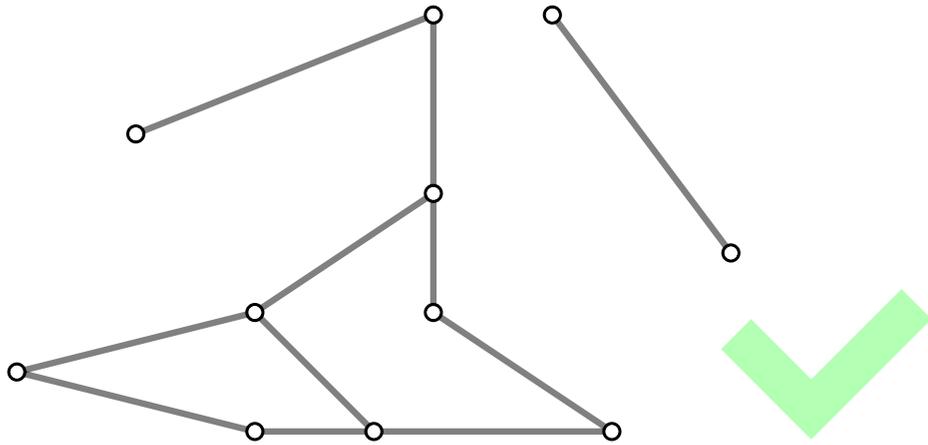


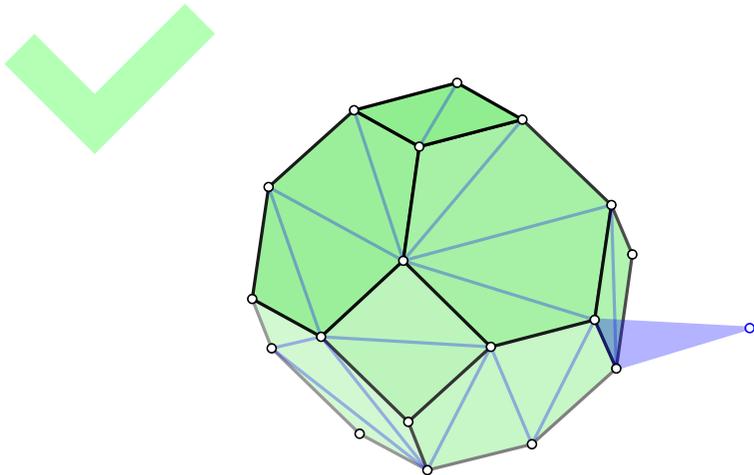
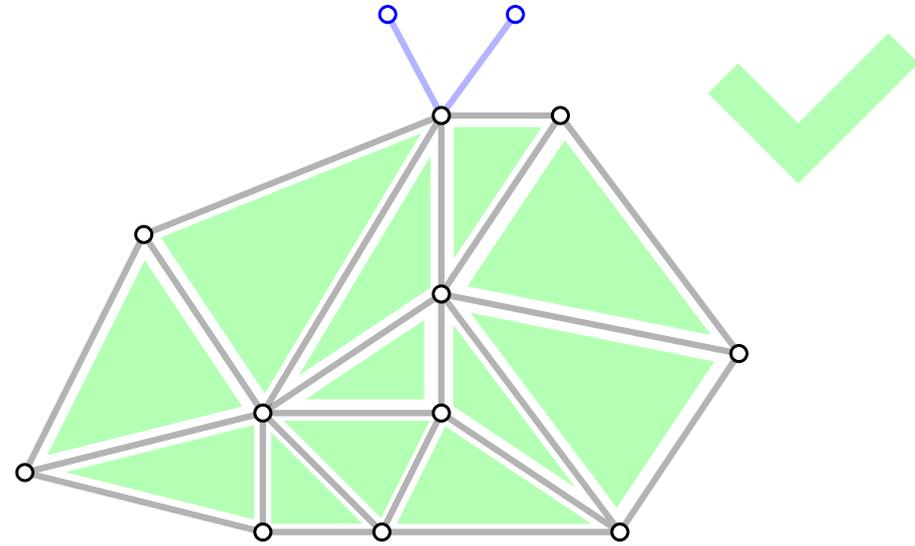
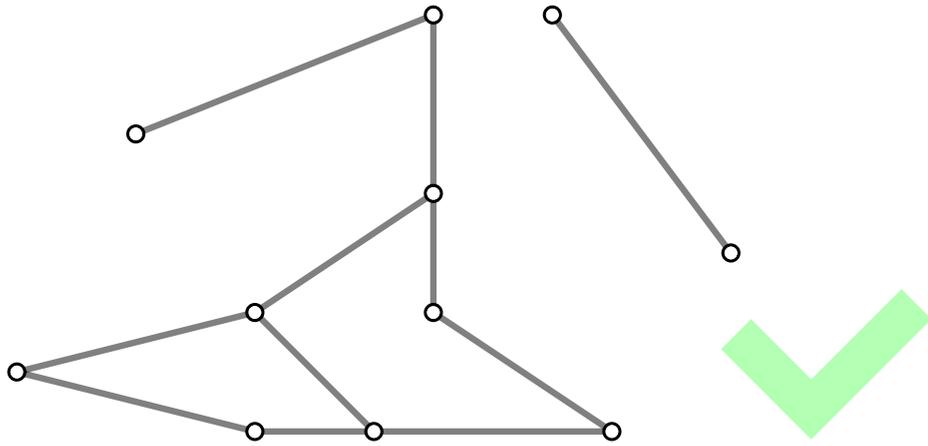








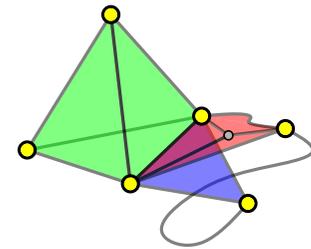




3. Au-delà de la planarité, la plongéabilité

(Ajout de contexte par rapport au chapitre.)

Le topologique



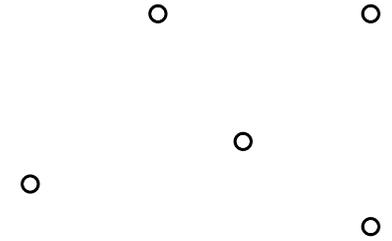
Graphe $\stackrel{\text{def}}{=}$ paire (V, E) avec V fini et $E \subset \binom{V}{2}$.

G planaire $\stackrel{\text{def}}{:}$ représentable **sans croisement** dans le plan.

Grphe $\stackrel{\text{def}}{=} \text{paire } (V, E)$ avec V fini et $E \subset \binom{V}{2}$.

G planaire $\stackrel{\text{def}}{:}$ représentable **sans croisement** dans le plan.

$f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective,

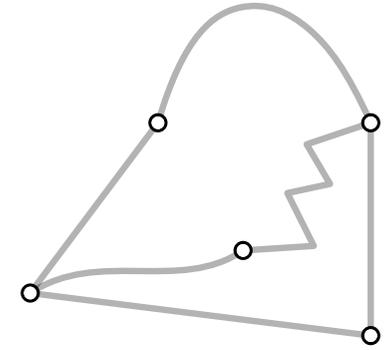


Grphe $\stackrel{\text{def}}{=} \text{paire } (V, E)$ avec V fini et $E \subset \binom{V}{2}$.

G planaire $\stackrel{\text{def}}{:}$ représentable **sans croisement** dans le plan.

$f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective,

$\{u, v\} \in E \mapsto \text{arc de Jordan entre } f(u) \text{ et } f(v),$



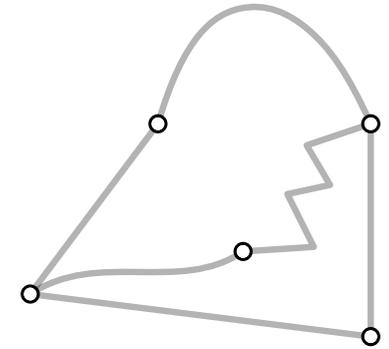
Grphe $\stackrel{\text{def}}{=} \text{paire } (V, E)$ avec V fini et $E \subset \binom{V}{2}$.

G planaire $\stackrel{\text{def}}{:}$ représentable **sans croisement** dans le plan.

$f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective,

$\{u, v\} \in E \mapsto \text{arc de Jordan entre } f(u) \text{ et } f(v),$

Images des arêtes ne se coupent qu'en un sommet commun.



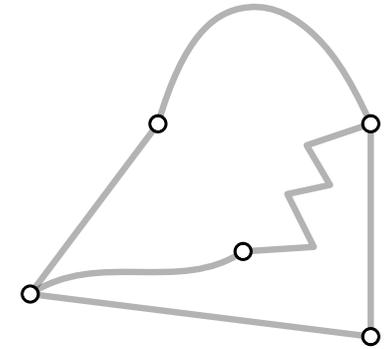
Graspe $\stackrel{\text{def}}{=} \text{paire } (V, E)$ avec V fini et $E \subset \binom{V}{2}$.

G planaire $\stackrel{\text{def}}{:}$ représentable sans croisement dans le plan.

$f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective,

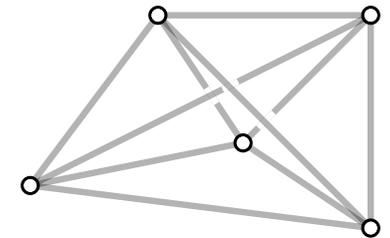
$\{u, v\} \in E \mapsto \text{arc de Jordan entre } f(u) \text{ et } f(v),$

Images des arêtes ne se coupent qu'en un sommet commun.



Tout graspe est représentable sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

Points de \mathbb{R}^3 sans quadruplets coplanaires + segments.



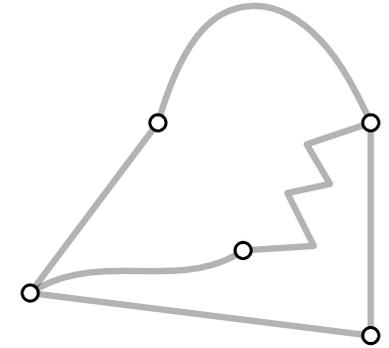
Graphe $\stackrel{\text{def}}{=}$ paire (V, E) avec V fini et $E \subset \binom{V}{2}$.

G planaire $\stackrel{\text{def}}{:}$ représentable **sans croisement** dans le plan.

$f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective,

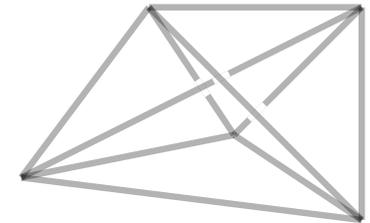
$\{u, v\} \in E \mapsto$ arc de Jordan entre $f(u)$ et $f(v)$,

Images des arêtes ne se coupent qu'en un sommet commun.



Tout graphe est représentable sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

Points de \mathbb{R}^3 **sans quadruplets coplanaires** + segments.



Espace topologique $\|G\| \subset \mathbb{R}^3$ associé à G .

Fixer une représentation de G sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

$\|G\| \stackrel{\text{def}}{=} \text{union des images des sommets et arêtes.}$

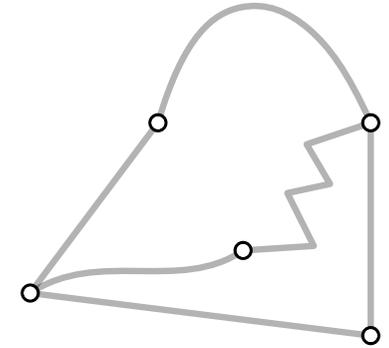
Graphe $\stackrel{\text{def}}{=}$ paire (V, E) avec V fini et $E \subset \binom{V}{2}$.

G planaire $\stackrel{\text{def}}{:}$ représentable **sans croisement** dans le plan.

$f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective,

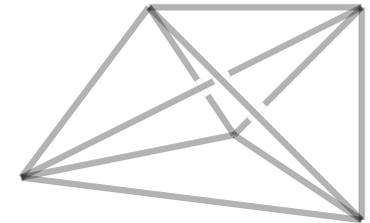
$\{u, v\} \in E \mapsto$ arc de Jordan entre $f(u)$ et $f(v)$,

Images des arêtes ne se coupent qu'en un sommet commun.



Tout graphe est représentable sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

Points de \mathbb{R}^3 **sans quadruplets coplanaires** + segments.



Espace topologique $\|G\| \subset \mathbb{R}^3$ associé à G .

Fixer une représentation de G sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

$\|G\| \stackrel{\text{def}}{=} \text{union des images des sommets et arêtes.}$

$X \xrightarrow{f} Y$ plonge X dans Y

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$ est un **homéomorphisme** entre X et $f(X)$.

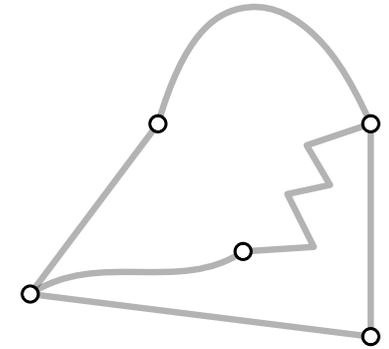
Grphe $\stackrel{\text{def}}{=} \text{paire } (V, E) \text{ avec } V \text{ fini et } E \subset \binom{V}{2}$.

G planaire $\stackrel{\text{def}}{:}$ représentable sans croisement dans le plan.

$f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective,

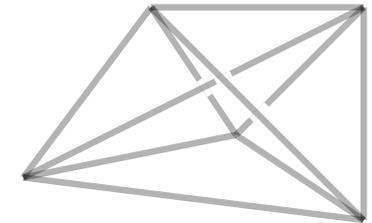
$\{u, v\} \in E \mapsto \text{arc de Jordan entre } f(u) \text{ et } f(v)$,

Images des arêtes ne se coupent qu'en un sommet commun.

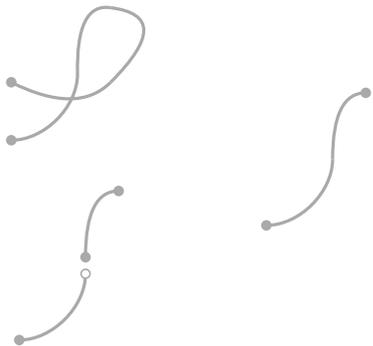


Tout graphe est représentable sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

Points de \mathbb{R}^3 sans quadruplets coplanaires + segments.



$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$



Espace topologique $\|G\| \subset \mathbb{R}^3$ associé à G .

Fixer une représentation de G sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

$\|G\| \stackrel{\text{def}}{=} \text{union des images des sommets et arêtes.}$

$X \xrightarrow{f} Y$ plonge X dans Y

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$ est un homéomorphisme entre X et $f(X)$.

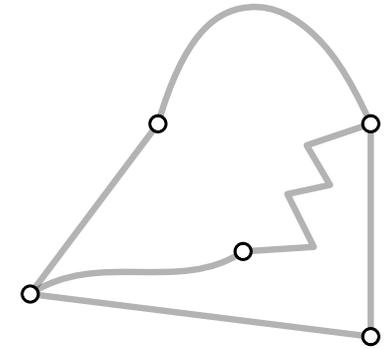
Grphe $\stackrel{\text{def}}{=} \text{paire } (V, E) \text{ avec } V \text{ fini et } E \subset \binom{V}{2}$.

G planaire $\stackrel{\text{def}}{:}$ représentable **sans croisement** dans le plan.

$f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective,

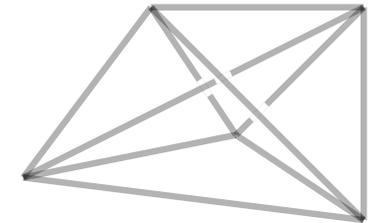
$\{u, v\} \in E \mapsto \text{arc de Jordan entre } f(u) \text{ et } f(v)$,

Images des arêtes ne se coupent qu'en un sommet commun.

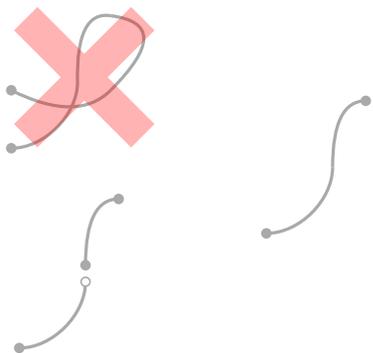


Tout graphe est représentable sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

Points de \mathbb{R}^3 **sans quadruplets coplanaires** + segments.



$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$



Espace topologique $\|G\| \subset \mathbb{R}^3$ associé à G .

Fixer une représentation de G sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

$\|G\| \stackrel{\text{def}}{=} \text{union des images des sommets et arêtes.}$

$X \xrightarrow{f} Y$ plonge X dans Y

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$ est un **homéomorphisme** entre X et $f(X)$.

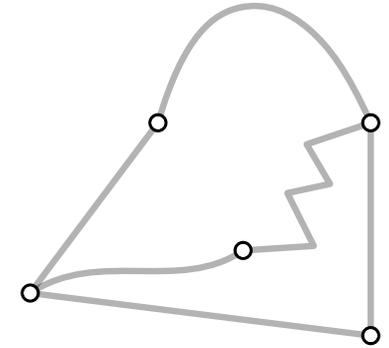
Graphe $\stackrel{\text{def}}{=} \text{paire } (V, E) \text{ avec } V \text{ fini et } E \subset \binom{V}{2}$.

G planaire $\stackrel{\text{def}}{:}$ représentable **sans croisement** dans le plan.

$f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective,

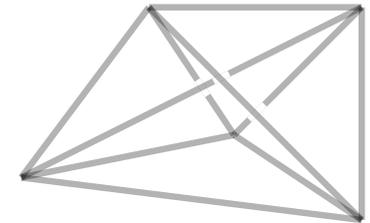
$\{u, v\} \in E \mapsto \text{arc de Jordan entre } f(u) \text{ et } f(v)$,

Images des arêtes ne se coupent qu'en un sommet commun.

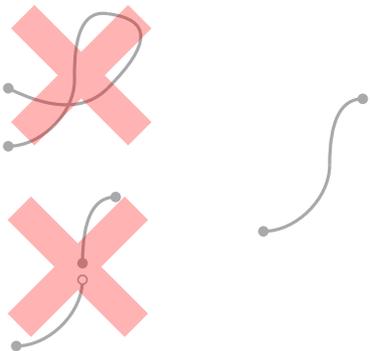


Tout graphe est représentable sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

Points de \mathbb{R}^3 **sans quadruplets coplanaires** + segments.



$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$



Espace topologique $\|G\| \subset \mathbb{R}^3$ associé à G .

Fixer une représentation de G sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

$\|G\| \stackrel{\text{def}}{=} \text{union des images des sommets et arêtes.}$

$X \xrightarrow{f} Y$ plonge X dans Y

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$ est un **homéomorphisme** entre X et $f(X)$.

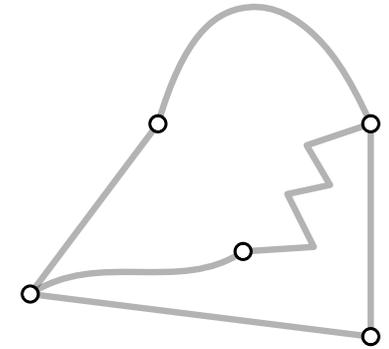
Grphe $\stackrel{\text{def}}{=} \text{paire } (V, E) \text{ avec } V \text{ fini et } E \subset \binom{V}{2}.$

G planaire $\stackrel{\text{def}}{:}$ représentable **sans croisement** dans le plan.

$f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective,

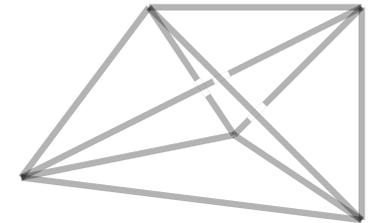
$\{u, v\} \in E \mapsto \text{arc de Jordan entre } f(u) \text{ et } f(v),$

Images des arêtes ne se coupent qu'en un sommet commun.

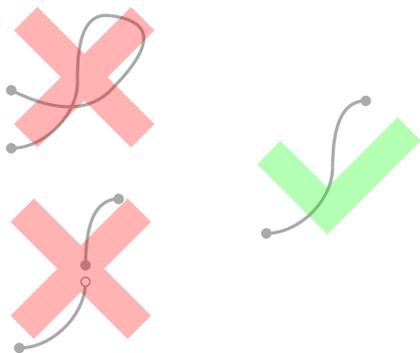


Tout graphe est représentable sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

Points de \mathbb{R}^3 **sans quadruplets coplanaires** + segments.



$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$



Espace topologique $\|G\| \subset \mathbb{R}^3$ associé à G .

Fixer une représentation de G sans croisement dans \mathbb{R}^3 .

$\|G\| \stackrel{\text{def}}{=} \text{union des images des sommets et arêtes.}$

$X \xrightarrow{f} Y$ plonge X dans Y

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$ est un **homéomorphisme** entre X et $f(X)$.

Un graphe est **planaire** si son espace topologique associé **se plonge** dans \mathbb{R}^2 .

Un graphe est **planaire** si son espace topologique associé **se plonge** dans \mathbb{R}^2 .

- Notation : $\|G\| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$
- **Genre** d'un graphe.
- *C.f.* [Kuratowski'30]

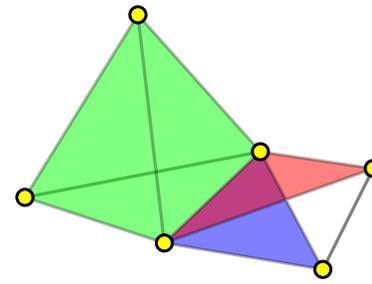
Un graphe est **planaire** si son espace topologique associé **se plonge** dans \mathbb{R}^2 .

- Notation : $\|G\| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$
- **Genre** d'un graphe.
- *C.f.* [Kuratowski'30]

Ce point de vue se généralise aux complexes simpliciaux géométriques.

\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

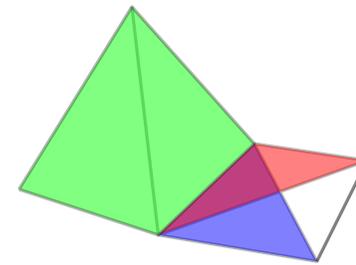
$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$, σ_i un simplexe de \mathbb{R}^d .
Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .



\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .



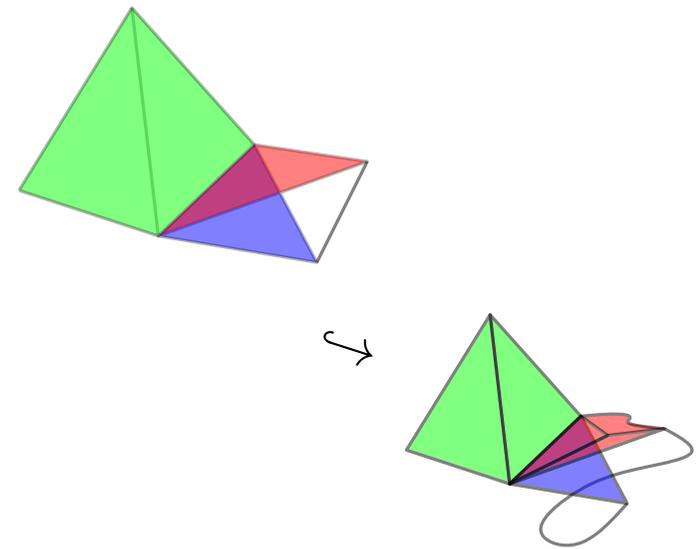
$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma$ l'espace topologique associé.

\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{l'espace topologique associé.}$$



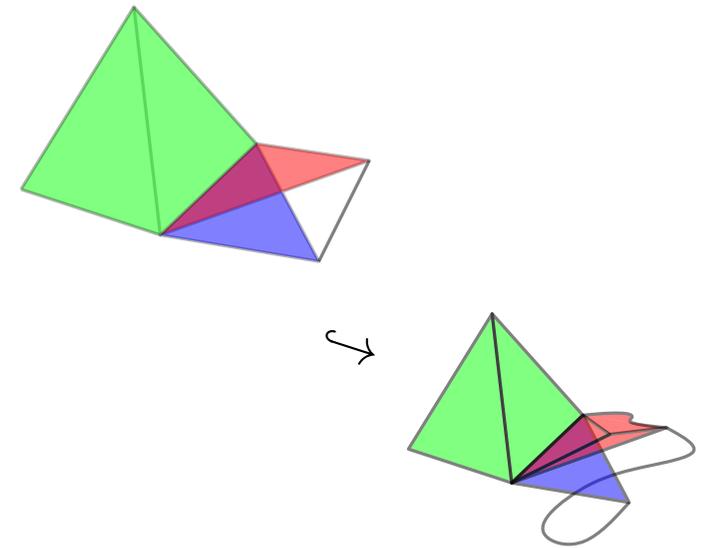
\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma$ l'espace topologique associé.

Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de dimension δ , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

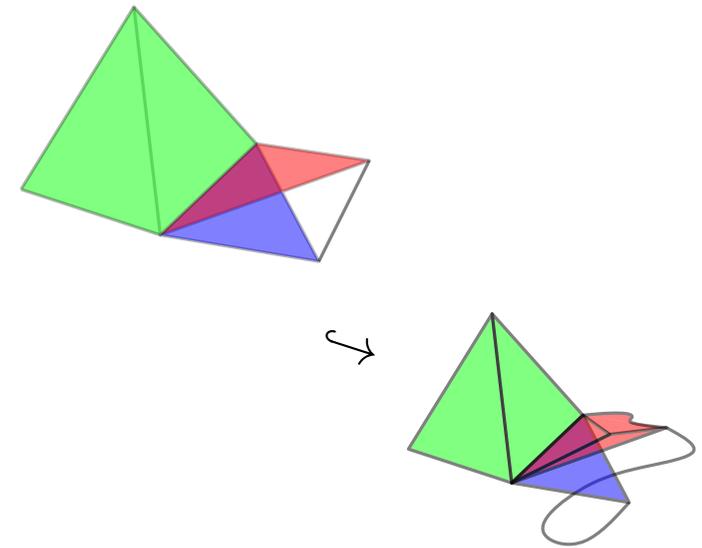


\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma$ l'espace topologique associé.



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de dimension δ , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

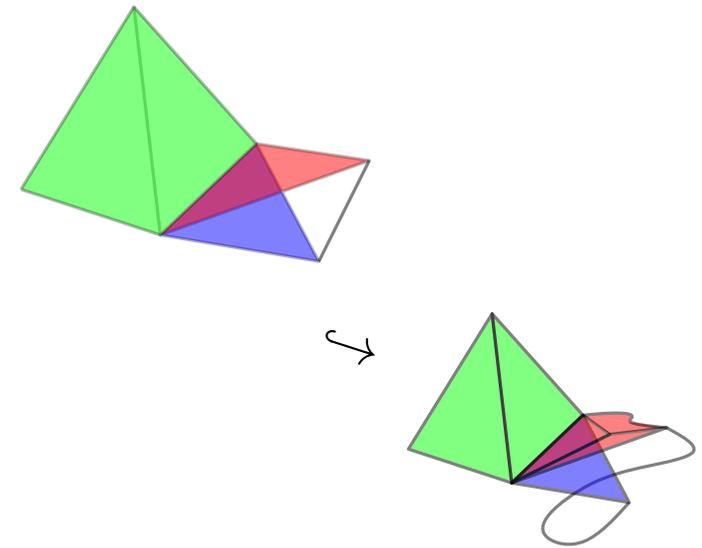
Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma$ l'espace topologique associé.



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de dimension δ , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

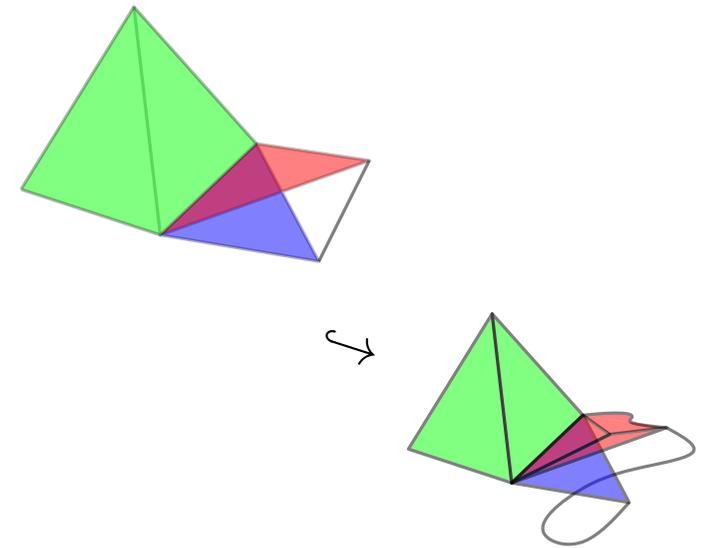
Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma$ l'espace topologique associé.



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de **dimension** δ , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

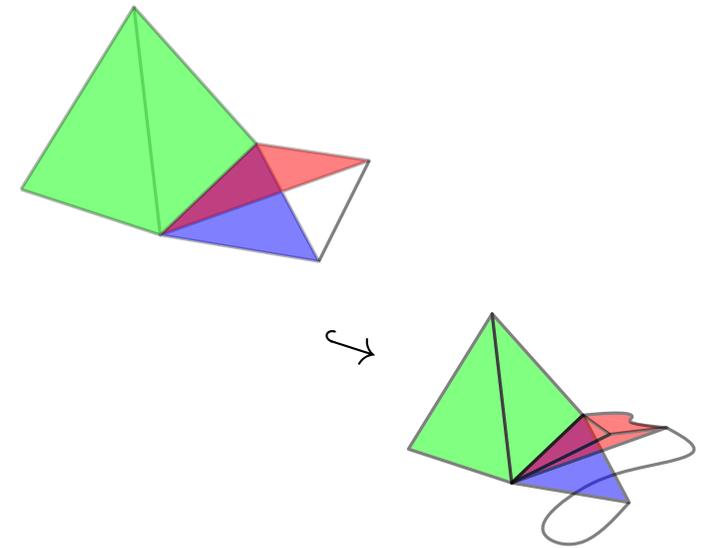
Deux k -espaces qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^{2k} .

\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma$ l'espace topologique associé.



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de dimension δ , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

Deux k -espaces qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^{2k} .

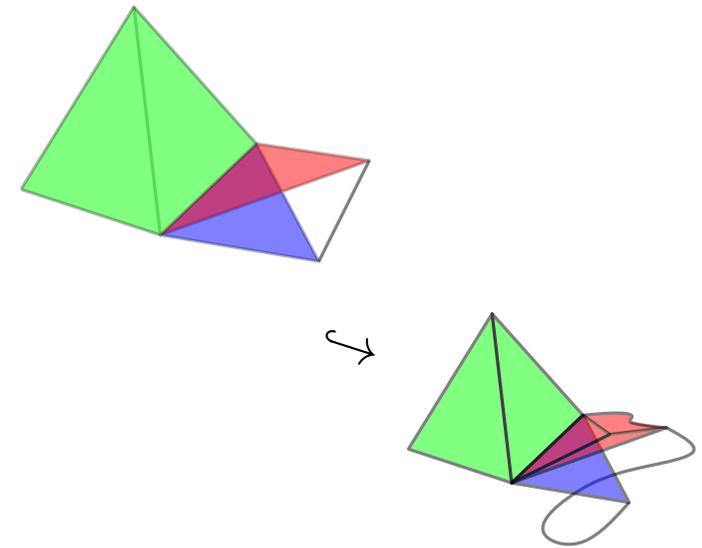
Sommets de $\mathcal{K} \rightarrow$ points t. q. $2(\delta + 1)$ points ne sont jamais dans un même $\mathbb{R}^{2\delta}$ puis étendre à $\|\mathcal{K}\|$ affinement sur chaque simplexe.

\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{l'espace topologique associé.}$$



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de **dimension** δ , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

Deux k -espaces qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^{2k} .

Sommets de $\mathcal{K} \rightarrow$ points t. q. $2(\delta + 1)$ points ne sont jamais dans un même $\mathbb{R}^{2\delta}$ puis étendre à $\|\mathcal{K}\|$ affinement sur chaque simplexe.

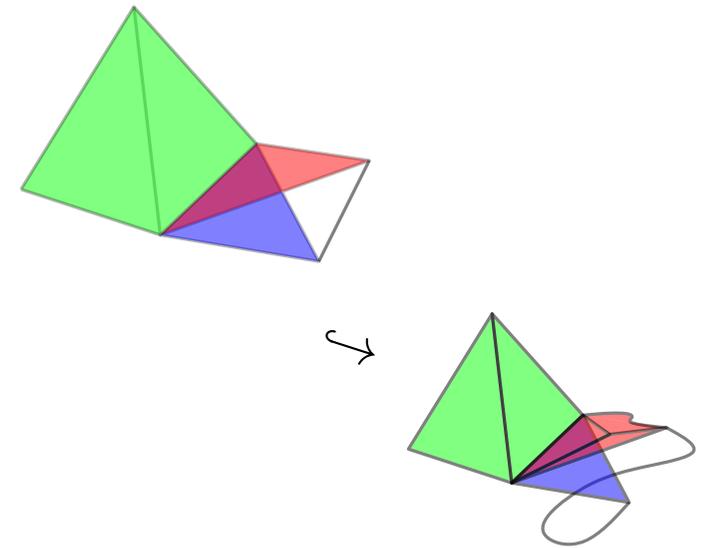
Position générale en dimension $2\delta + 1$.

\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{l'espace topologique associé.}$$



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de **dimension** δ , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

Deux k -espaces qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^{2k} .

Sommets de $\mathcal{K} \rightarrow$ points t. q. $2(\delta + 1)$ points ne sont jamais dans un même $\mathbb{R}^{2\delta}$ puis étendre à $\|\mathcal{K}\|$ affinement sur chaque simplexe.

Position générale en dimension $2\delta + 1$.

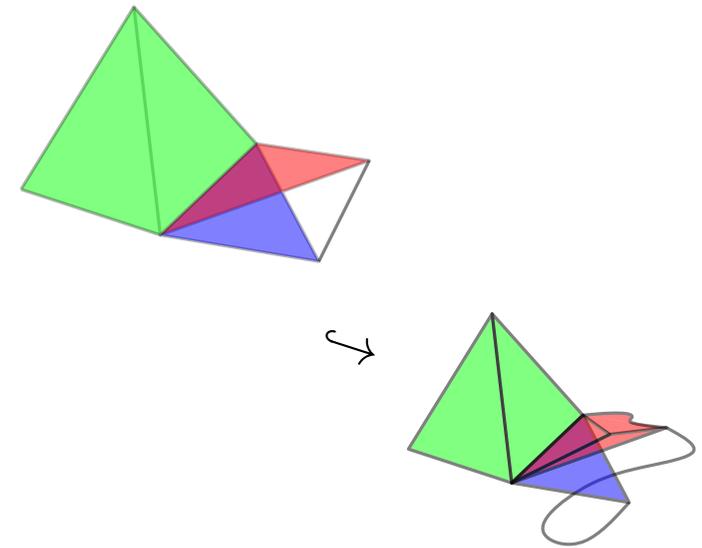
L'examen de **complexes complets** révèle que c'est optimal.

\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{l'espace topologique associé.}$$



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de **dimension** δ , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

Deux k -espaces qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^{2k} .

Sommets de $\mathcal{K} \rightarrow$ points t. q. $2(\delta + 1)$ points ne sont jamais dans un même $\mathbb{R}^{2\delta}$ puis étendre à $\|\mathcal{K}\|$ affinement sur chaque simplexe.

Position générale en dimension $2\delta + 1$.

L'examen de **complexes complets** révèle que c'est optimal.

$$\Delta_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P) : P \subset \text{base canonique de } \mathbb{R}^{n+1}, |P| \leq k + 1\}.$$

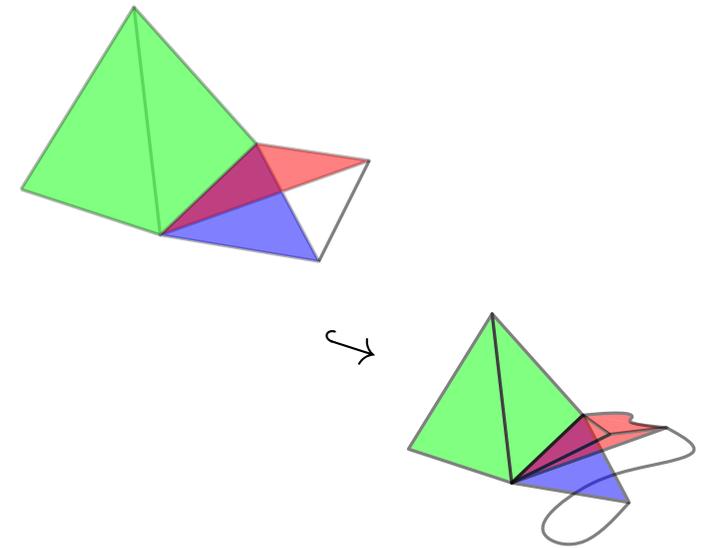
Toutes les faces de $\dim \leq k$ sur $n + 1$ sommets.

\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{l'espace topologique associé.}$$



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de dimension δ , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

Deux k -espaces qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^{2k} .

Sommets de $\mathcal{K} \rightarrow$ points t. q. $2(\delta + 1)$ points ne sont jamais dans un même $\mathbb{R}^{2\delta}$ puis étendre à $\|\mathcal{K}\|$ affinement sur chaque simplexe.

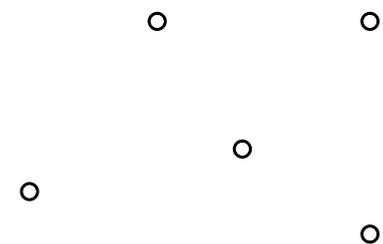
Position générale en dimension $2\delta + 1$.

L'examen de **complexes complets** révèle que c'est optimal.

$$\Delta_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P) : P \subset \text{base canonique de } \mathbb{R}^{n+1}, |P| \leq k + 1\}.$$

Toutes les faces de $\dim \leq k$ sur $n + 1$ sommets.

$n = 4$

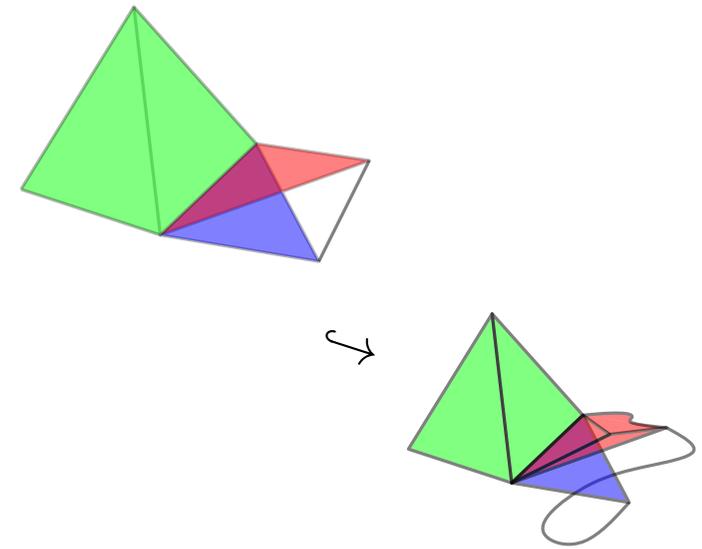


\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{l'espace topologique associé.}$$



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de **dimension δ** , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

Deux k -espaces qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^{2k} .

Sommets de $\mathcal{K} \rightarrow$ points t. q. $2(\delta + 1)$ points ne sont jamais dans un même $\mathbb{R}^{2\delta}$ puis étendre à $\|\mathcal{K}\|$ affinement sur chaque simplexe.

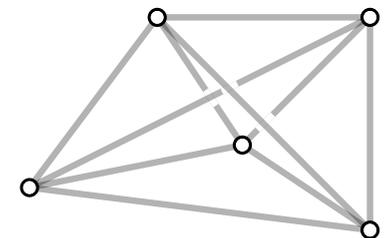
Position générale en dimension $2\delta + 1$.

L'examen de **complexes complets** révèle que c'est optimal.

$$\Delta_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P) : P \subset \text{base canonique de } \mathbb{R}^{n+1}, |P| \leq k + 1\}.$$

Toutes les faces de $\dim \leq k$ sur $n + 1$ sommets.

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

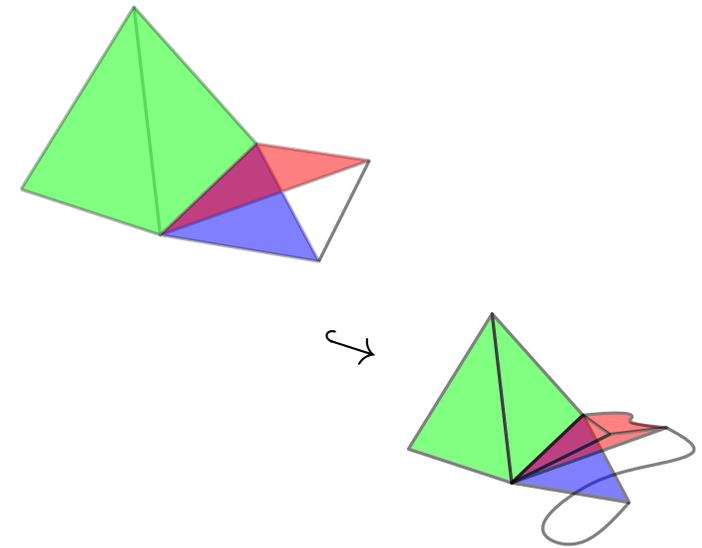


\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{l'espace topologique associé.}$$



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de **dimension δ** , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

Deux k -espaces qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^{2k} .

Sommets de $\mathcal{K} \rightarrow$ points t. q. $2(\delta + 1)$ points ne sont jamais dans un même $\mathbb{R}^{2\delta}$ puis étendre à $\|\mathcal{K}\|$ affinement sur chaque simplexe.

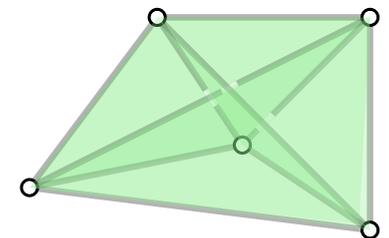
Position générale en dimension $2\delta + 1$.

L'examen de **complexes complets** révèle que c'est optimal.

$$\Delta_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P) : P \subset \text{base canonique de } \mathbb{R}^{n+1}, |P| \leq k + 1\}.$$

Toutes les faces de $\dim \leq k$ sur $n + 1$ sommets.

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ k &= 1 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

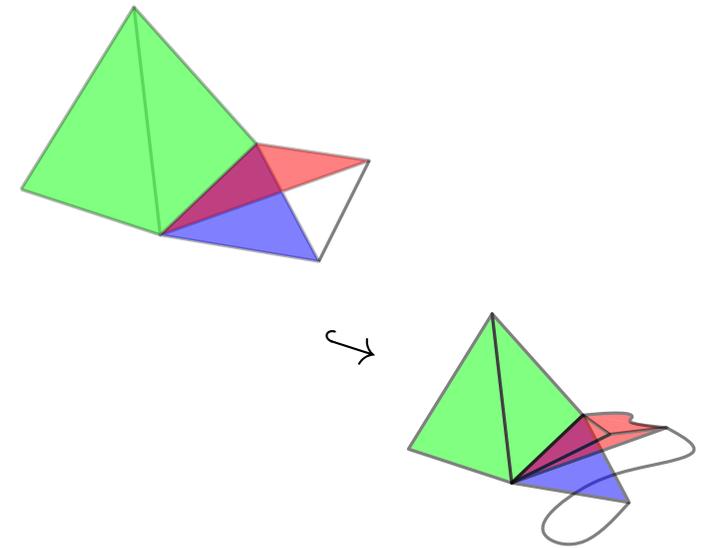


\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{l'espace topologique associé.}$$



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de dimension δ , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

Deux k -espaces qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^{2k} .

Sommets de $\mathcal{K} \rightarrow$ points t. q. $2(\delta + 1)$ points ne sont jamais dans un même $\mathbb{R}^{2\delta}$ puis étendre à $\|\mathcal{K}\|$ affinement sur chaque simplexe.

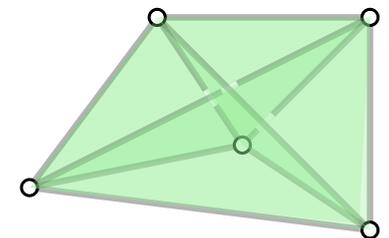
Position générale en dimension $2\delta + 1$.

L'examen de **complexes complets** révèle que c'est optimal.

$$\Delta_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P) : P \subset \text{base canonique de } \mathbb{R}^{n+1}, |P| \leq k + 1\}.$$

Toutes les faces de $\dim \leq k$ sur $n + 1$ sommets.

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ k &= 1 \\ k &= 2 \end{aligned}$$



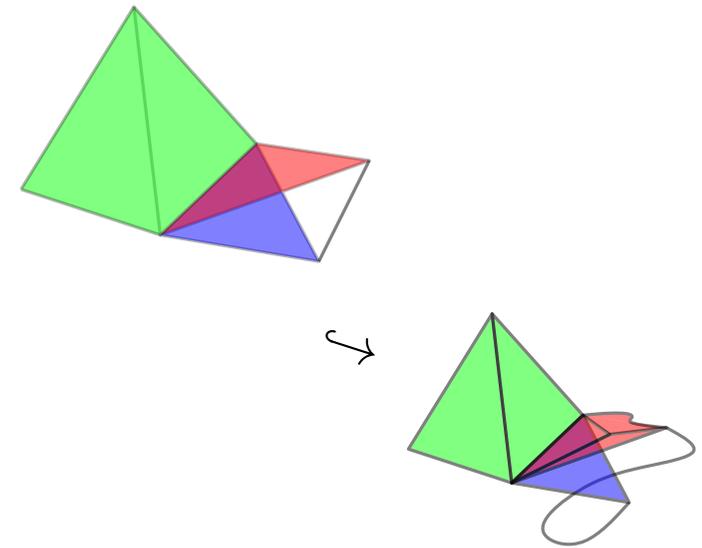
Van Kampen-Flores. $\forall \delta \geq 1, \|\Delta_{2\delta+2}^{(\delta)}\| \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta}$.

\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{l'espace topologique associé.}$$



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de **dimension δ** , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

Deux k -espaces qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^{2k} .

Sommets de $\mathcal{K} \rightarrow$ points t. q. $2(\delta + 1)$ points ne sont jamais dans un même $\mathbb{R}^{2\delta}$ puis étendre à $\|\mathcal{K}\|$ affinement sur chaque simplexe.

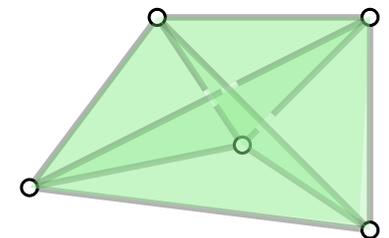
Position générale en dimension $2\delta + 1$.

L'examen de **complexes complets** révèle que c'est optimal.

$$\Delta_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P) : P \subset \text{base canonique de } \mathbb{R}^{n+1}, |P| \leq k + 1\}.$$

Toutes les faces de $\dim \leq k$ sur $n + 1$ sommets.

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ k &= 1 \\ k &= 2 \end{aligned}$$



Van Kampen-Flores. $\forall \delta \geq 1, \|\Delta_{2\delta+2}^{(\delta)}\| \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta}$.

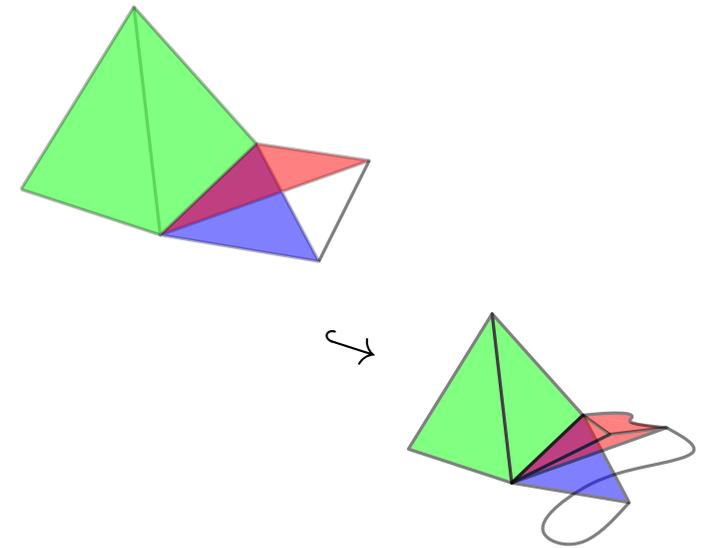
$$K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2,$$

\mathcal{K} un complexe simplicial géométrique de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{K} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \sigma_i \text{ un simplexe de } \mathbb{R}^d.$$

Clôt par "prendre une face" et compatible avec \cap .

$$\|\mathcal{K}\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{l'espace topologique associé.}$$



Proposition. Si \mathcal{K} est un complexe simplicial géométrique de dimension δ , $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta+1}$.

Idée

Deux droites qui se coupent sont coplanaires.

Deux plans qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^4 .

Deux k -espaces qui se coupent sont contenus dans un même \mathbb{R}^{2k} .

Sommets de $\mathcal{K} \rightarrow$ points t. q. $2(\delta + 1)$ points ne sont jamais dans un même $\mathbb{R}^{2\delta}$ puis étendre à $\|\mathcal{K}\|$ affinement sur chaque simplexe.

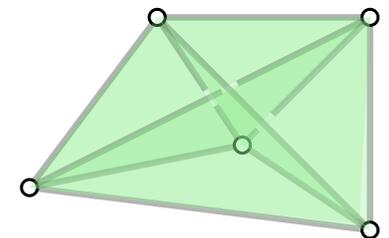
Position générale en dimension $2\delta + 1$.

L'examen de complexes complets révèle que c'est optimal.

$$\Delta_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P) : P \subset \text{base canonique de } \mathbb{R}^{n+1}, |P| \leq k + 1\}.$$

Toutes les faces de $\dim \leq k$ sur $n + 1$ sommets.

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ k &= 1 \\ k &= 2 \end{aligned}$$



Van Kampen-Flores. $\forall \delta \geq 1, \|\Delta_{2\delta+2}^{(\delta)}\| \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta}$.

$K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2, \bigcup \text{triangles sur 7 points} \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4, \dots$

Peut-on généraliser "Un graphe planaire à n sommets a $\leq 3n$ arêtes" ?

Peut-on généraliser "Un graphe planaire à n sommets a $\leq 3n$ arêtes" ?

Conjecture. Si $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta}$ alors $f_\delta(\mathcal{K}) \leq (\delta + 2)f_{\delta-1}(\mathcal{K})$.

$f_i(\mathcal{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ simplexes de dimension i de \mathcal{K} .

Peut-on généraliser "Un graphe planaire à n sommets a $\leq 3n$ arêtes" ?

Conjecture. Si $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta}$ alors $f_\delta(\mathcal{K}) \leq (\delta + 2)f_{\delta-1}(\mathcal{K})$.

$f_i(\mathcal{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ simplexes de dimension i de \mathcal{K} .

Si $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $\#$ arêtes $\leq 3 \#$ sommets.

Peut-on généraliser "Un graphe planaire à n sommets a $\leq 3n$ arêtes" ?

Conjecture. Si $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta}$ alors $f_\delta(\mathcal{K}) \leq (\delta + 2)f_{\delta-1}(\mathcal{K})$.

$f_i(\mathcal{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ simplexes de dimension i de \mathcal{K} .

Si $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $\#$ arêtes $\leq 3 \#$ sommets.



Peut-on généraliser "Un graphe planaire à n sommets a $\leq 3n$ arêtes" ?

Conjecture. Si $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta}$ alors $f_\delta(\mathcal{K}) \leq (\delta + 2)f_{\delta-1}(\mathcal{K})$.

$f_i(\mathcal{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ simplexes de dimension i de \mathcal{K} .

Si $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $\#$ arêtes $\leq 3 \#$ sommets.



$f_\delta = O(f_{\delta-1})$ ouvert pour tout $\delta \geq 2$ jusqu'à récemment.

Peut-on généraliser "Un graphe planaire à n sommets a $\leq 3n$ arêtes" ?

Conjecture. Si $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta}$ alors $f_\delta(\mathcal{K}) \leq (\delta + 2)f_{\delta-1}(\mathcal{K})$.

$f_i(\mathcal{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ simplexes de dimension i de \mathcal{K} .

Si $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $\#$ arêtes $\leq 3 \#$ sommets.



$f_\delta = O(f_{\delta-1})$ ouvert pour tout $\delta \geq 2$ jusqu'à récemment.

Preuve annoncée par Karim Adiprasito en Décembre 2018
entre autres résultats.

[arXiv :1812.10454](https://arxiv.org/abs/1812.10454) et [arXiv :1906.05859](https://arxiv.org/abs/1906.05859)

Peut-on généraliser "Un graphe planaire à n sommets a $\leq 3n$ arêtes" ?

Conjecture. Si $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\delta}$ alors $f_\delta(\mathcal{K}) \leq (\delta + 2)f_{\delta-1}(\mathcal{K})$.

$f_i(\mathcal{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ simplexes de dimension i de \mathcal{K} .

Si $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $\#$ arêtes $\leq 3 \#$ sommets.

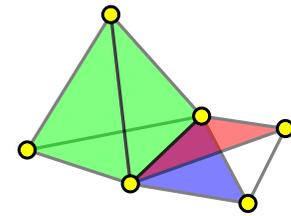


$f_\delta = O(f_{\delta-1})$ ouvert pour tout $\delta \geq 2$ jusqu'à récemment.

Preuve annoncée par Karim Adiprasito en Décembre 2018
entre autres résultats.

[arXiv :1812.10454](https://arxiv.org/abs/1812.10454) et [arXiv :1906.05859](https://arxiv.org/abs/1906.05859)

Le linéaire



Convexité combinatoire = cas des plongements linéaires.

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \sigma \in \mathcal{K}, f|_{\sigma}$ est affine. Noté \hookrightarrow_L .

Convexité combinatoire = cas des plongements linéaires.

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \sigma \in \mathcal{K}, f|_{\sigma}$ est affine. Noté \hookrightarrow_L .

Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.



Convexité combinatoire = cas des plongements linéaires.

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \sigma \in \mathcal{K}, f|_{\sigma}$ est affine. Noté \hookrightarrow_L .

Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

\Downarrow

Radon. $\forall d \geq 1, \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \not\hookrightarrow_L \mathbb{R}^d$.

$\Delta_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{complexe complet de dim } \leq k \text{ sur } n + 1 \text{ sommets.}$



Convexité combinatoire = cas des plongements linéaires.

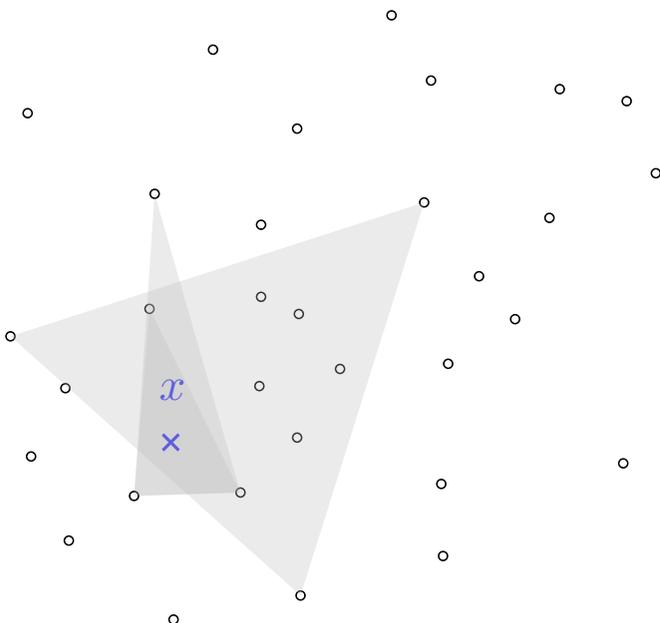
$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \sigma \in \mathcal{K}, f|_{\sigma}$ est affine. Noté \hookrightarrow_L .

Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

\Downarrow

Radon. $\forall d \geq 1, \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \not\hookrightarrow_L \mathbb{R}^d$.

$\Delta_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{complexe complet de dim } \leq k \text{ sur } n + 1 \text{ sommets.}$



Sélection. $\forall d \exists c_d, \forall P \subset \mathbb{R}^d, \exists x \in \mathbb{R}^d$ t. q. $x \in$ une fraction c_d des simplexes à sommets dans P .

Convexité combinatoire = cas des plongements linéaires.

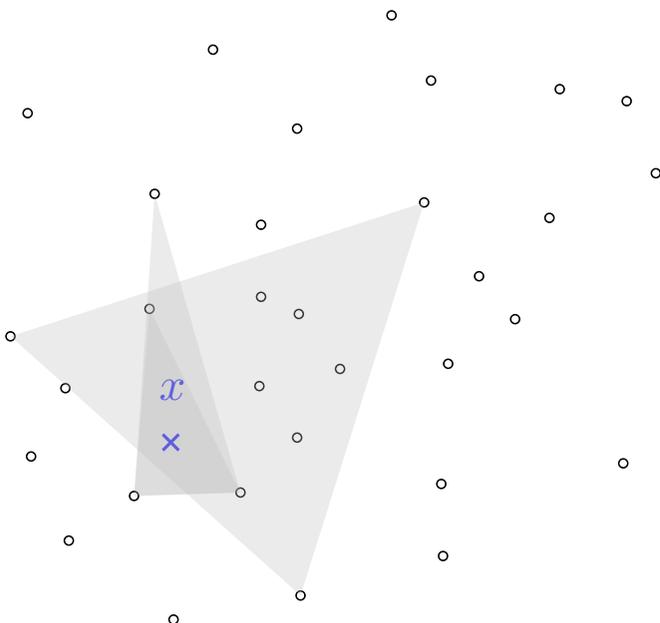
$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \sigma \in \mathcal{K}, f|_{\sigma}$ est affine. Noté \hookrightarrow_L .

Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

\Downarrow

Radon. $\forall d \geq 1, \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \not\rightarrow_L \mathbb{R}^d$.

$\Delta_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{complexe complet de dim } \leq k \text{ sur } n + 1 \text{ sommets.}$



Sélection. $\forall d \exists c_d, \forall P \subset \mathbb{R}^d, \exists x \in \mathbb{R}^d$ t. q. $x \in$ une fraction c_d des simplexes à sommets dans P .

\Downarrow

Sélection. $\forall d$, pour tout $\|\Delta_n^{(d)}\| \rightarrow_L \mathbb{R}^d, \exists x \in \mathbb{R}^d$ dans l'image d'une fraction constante des simplexes de \mathcal{K} .

Convexité combinatoire = cas des plongements linéaires.

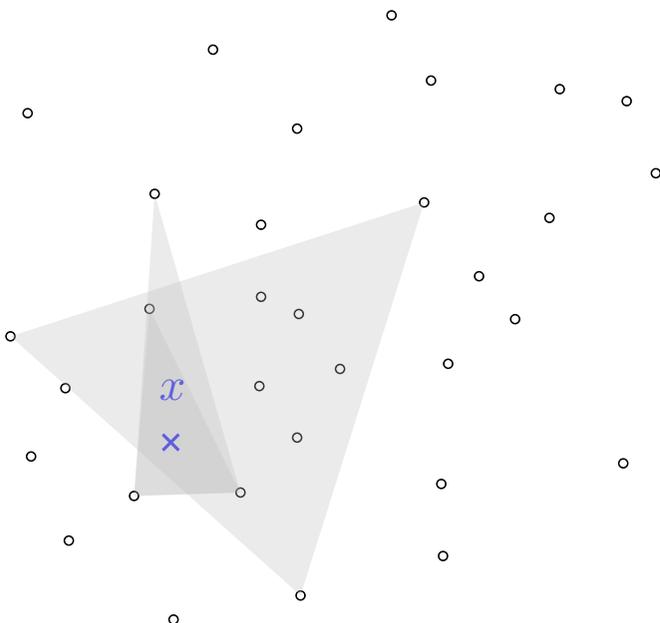
$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \sigma \in \mathcal{K}, f|_{\sigma}$ est affine. Noté \hookrightarrow_L .

Radon : Tout ensemble de $n \geq d + 2$ points de \mathbb{R}^d contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

\Downarrow

Radon. $\forall d \geq 1, \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \not\rightarrow_{\mathbb{L}} \mathbb{R}^d$.

$\Delta_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{complexe complet de dim } \leq k \text{ sur } n + 1 \text{ sommets.}$



Sélection. $\forall d \exists c_d, \forall P \subset \mathbb{R}^d, \exists x \in \mathbb{R}^d$ t. q. $x \in$ une fraction c_d des simplexes à sommets dans P .

\Downarrow

Sélection. $\forall d$, pour tout $\|\Delta_n^{(d)}\| \rightarrow_{\mathbb{L}} \mathbb{R}^d, \exists x \in \mathbb{R}^d$ dans l'image d'une fraction constante des simplexes de \mathcal{K} .

???

Pour les graphes ($\delta = 1$), linéaire et topologique **coïncident**.

Fáry. Tout graphe planaire peut être dessiné avec des segments.

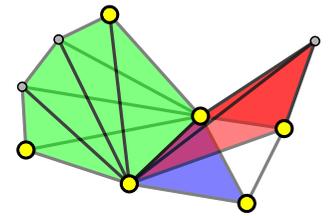
Pour les graphes ($\delta = 1$), linéaire et topologique **coïncident**.

Fáry. Tout graphe planaire peut être dessiné avec des segments.

En dimension $\delta \geq 2$, linéaire et topologique **différent**.

$\forall \delta \geq 2$ et $\forall \delta + 1 \leq d \leq 2\delta$, il existe \mathcal{K} de dimension δ
t. q. $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{K} \not\rightarrow_L \mathbb{R}^d$.

Le linéaire par morceaux

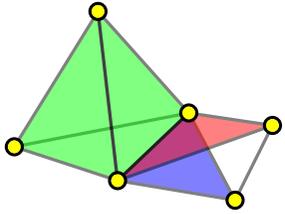


Un plongement PL de $\|\mathcal{K}\|$ est un plongement linéaire de $\|\mathcal{K}'\|$ où \mathcal{K}' subdivise \mathcal{K} .

Tout simplexe de \mathcal{K} est union de simplexes de \mathcal{K}' .

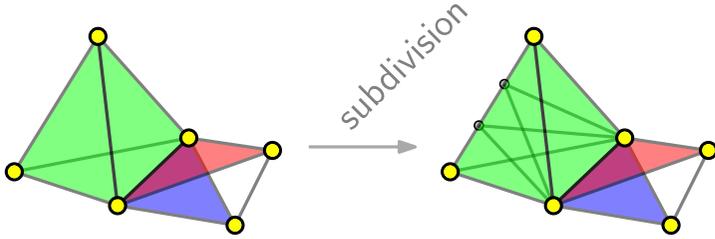
Un plongement PL de $\|\mathcal{K}\|$ est un plongement linéaire de $\|\mathcal{K}'\|$ où \mathcal{K}' subdivise \mathcal{K} .

Tout simplexe de \mathcal{K} est union de simplexes de \mathcal{K}' .



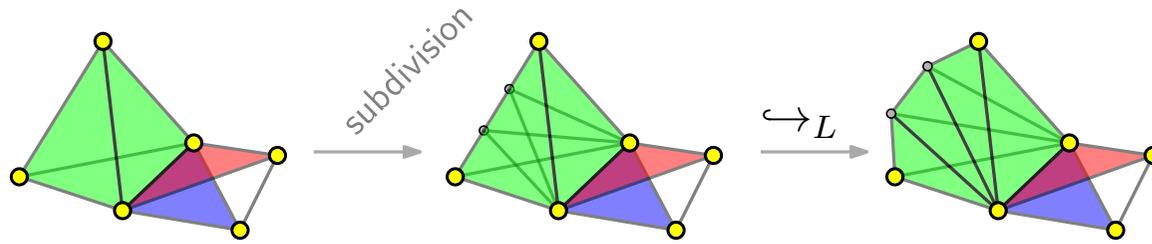
Un plongement PL de $\|\mathcal{K}\|$ est un plongement linéaire de $\|\mathcal{K}'\|$ où \mathcal{K}' subdivise \mathcal{K} .

Tout simplexe de \mathcal{K} est union de simplexes de \mathcal{K}' .



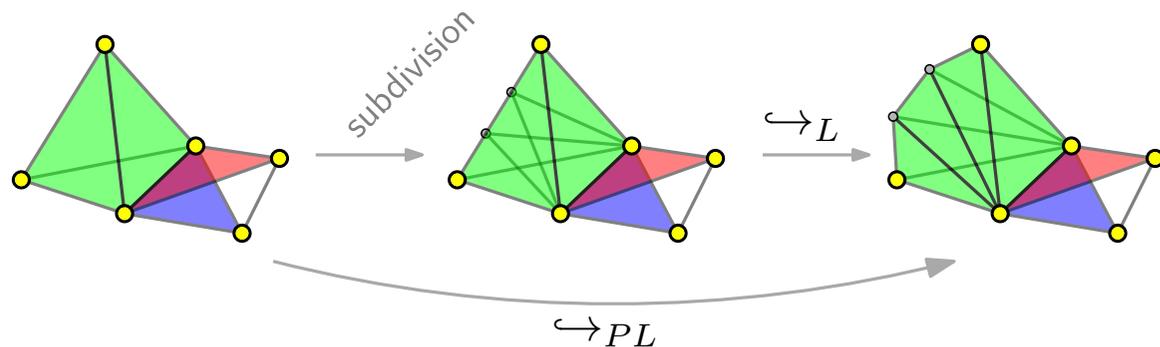
Un plongement PL de $\|\mathcal{K}\|$ est un plongement linéaire de $\|\mathcal{K}'\|$ où \mathcal{K}' subdivise \mathcal{K} .

Tout simplexe de \mathcal{K} est union de simplexes de \mathcal{K}' .



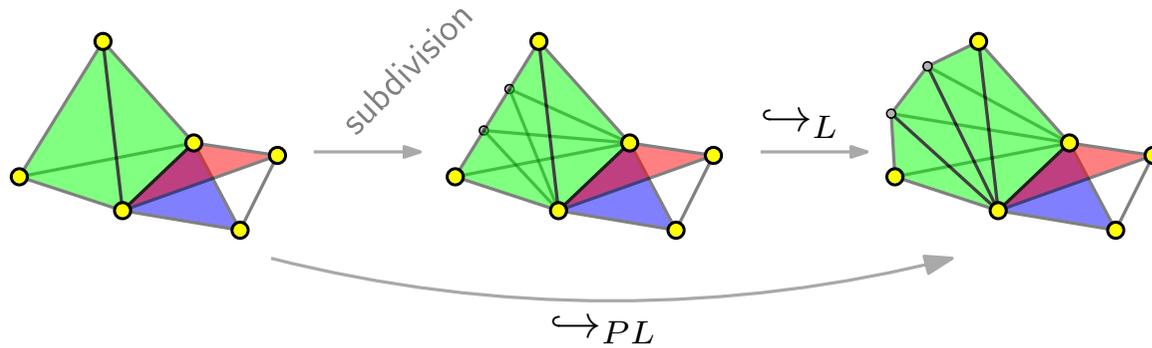
Un plongement PL de $\|\mathcal{K}\|$ est un plongement linéaire de $\|\mathcal{K}'\|$ où \mathcal{K}' subdivise \mathcal{K} .

Tout simplexe de \mathcal{K} est union de simplexes de \mathcal{K}' .



Un plongement PL de $\|\mathcal{K}\|$ est un plongement linéaire de $\|\mathcal{K}'\|$ où \mathcal{K}' subdivise \mathcal{K} .

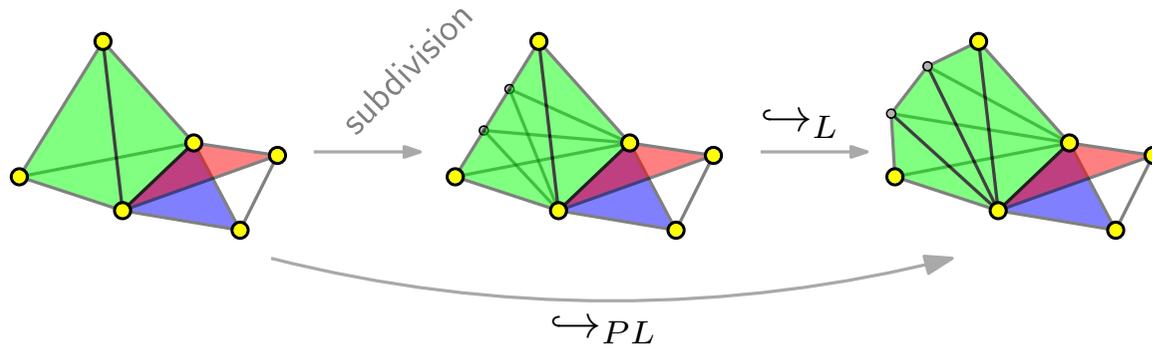
Tout simplexe de \mathcal{K} est union de simplexes de \mathcal{K}' .



EMBED $_{\delta,d}$:
Entrée : \mathcal{K} de dimension δ .
Sortie : $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow_{PL} \mathbb{R}^d$?

Un plongement PL de $\|\mathcal{K}\|$ est un plongement linéaire de $\|\mathcal{K}'\|$ où \mathcal{K}' subdivise \mathcal{K} .

Tout simplexe de \mathcal{K} est union de simplexes de \mathcal{K}' .



EMBED $_{\delta,d}$:
Entrée : \mathcal{K} de dimension δ .
Sortie : $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow_{PL} \mathbb{R}^d$?

$\delta \setminus d$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	L																			
2	L	D,NPh	NPh																	
3		D,NPh	NPh	NPh	P															
4			NPh	U	NPh	NPh	P													
5				U	U	NPh	U	P	P											
6					U	U	U	U	NPh	P	P									
7						U	U	U	U	U	P	P	P							
8							U	U	U	U	U	NPh	P	P	P					
9								U	U	U	U	U	U	P	P	P	P			
10									U	U	U	U	U	U	U	NPh	P	P	P	P

L= linéaire

P=polynomial

D=décidable

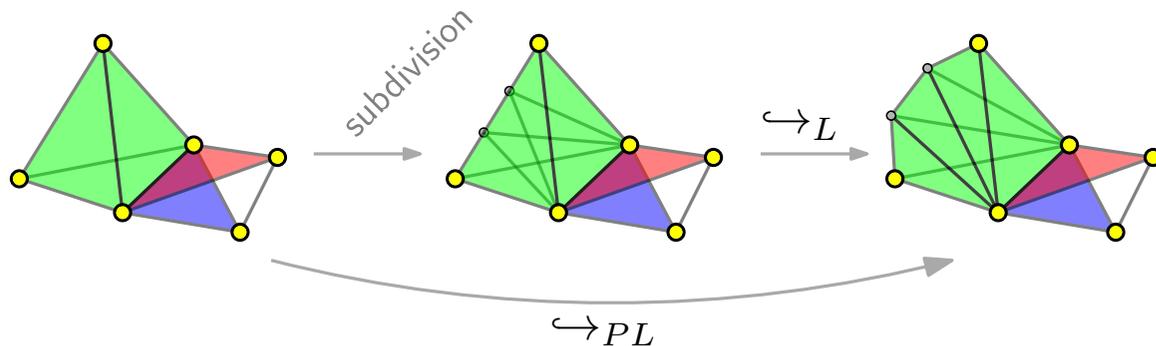
NPh=NP-difficile

U=indécidable

(Source : [Filakovský-Wagner-Zhechev'20])

Un plongement PL de $\|\mathcal{K}\|$ est un plongement linéaire de $\|\mathcal{K}'\|$ où \mathcal{K}' subdivise \mathcal{K} .

Tout simplexe de \mathcal{K} est union de simplexes de \mathcal{K}' .



EMBED $_{\delta,d}$: **Entrée** : \mathcal{K} de dimension δ .
Sortie : $\|\mathcal{K}\| \hookrightarrow_{PL} \mathbb{R}^d$?

$\delta \setminus d$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	L																		
2	L	D,NPh	NPh																
3		D,NPh	NPh	NPh	P														
4			NPh	U	NPh	NPh	P												
5				U	U	NPh	U	P	P										
6					U	U	U	U	NPh	P	P								
7						U	U	U	U	U	P	P	P						
8							U	U	U	U	U	NPh	P	P	P				
9								U	U	U	U	U	U	P	P	P	P		
10									U	U	U	U	U	U	U	NPh	P	P	P

L= linéaire

P=polynomial

D=décidable

NPh=NP-difficile

U=indécidable

(Source : [Filakovský-Wagner-Zhechev'20])

Revenons à la question (plus simple!) d'un **Radon topologique**.

4. Théorème de Borsuk-Ulam

Un résultat fondamental en topologie algébrique.

Applications : systèmes d'hyperplans, sandwich au jambon
et graphe de Kneser.

Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

$$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \text{ pour Van Kampen-Flores.}$$

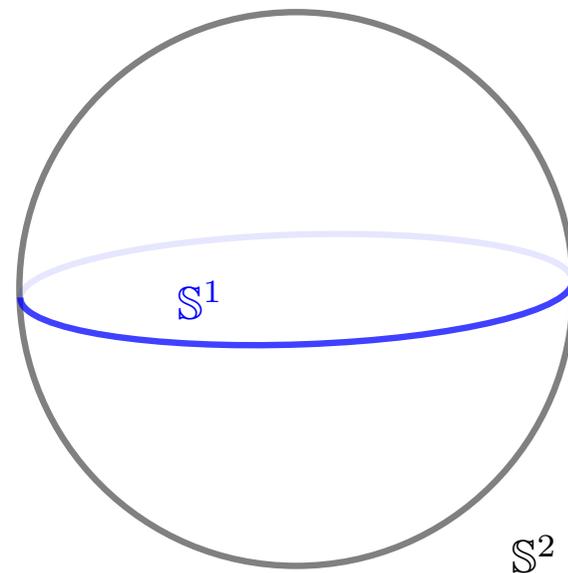
Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ pour **Radon (topologique)**,

$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ pour **Van Kampen-Flores**.

Borsuk-Ulam. Pour $1 \leq k < d$, il **n'existe pas** d'application **continue** et **antipodale** $\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^k$.

$$\mathbb{S}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}.$$



Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

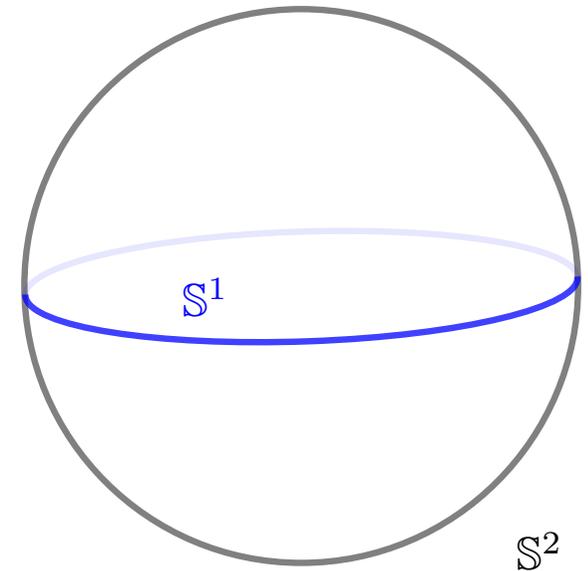
$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

$$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \text{ pour Van Kampen-Flores.}$$

Borsuk-Ulam. Pour $1 \leq k < d$, il n'existe pas d'application continue et antipodale $\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^k$.

$$\mathbb{S}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}.$$

$$f \text{ antipodale} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{S}^d, f(-x) = -f(x).$$



Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

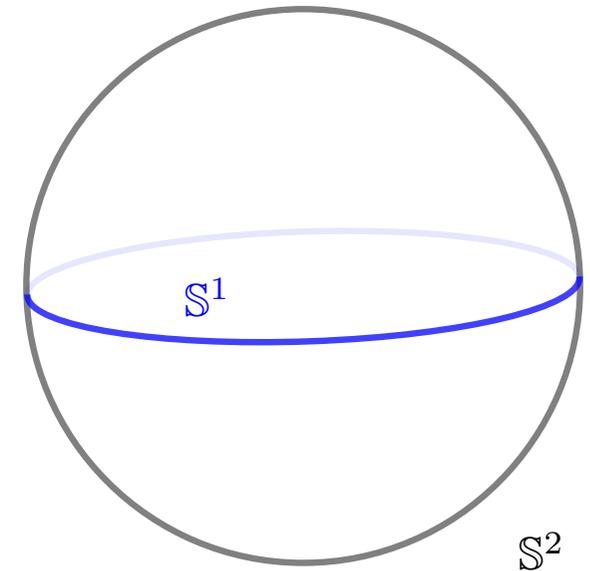
$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

$$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \text{ pour Van Kampen-Flores.}$$

Borsuk-Ulam. Pour $1 \leq k < d$, il n'existe pas d'application continue et antipodale $\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^k$.

$$\mathbb{S}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}.$$

$$f \text{ antipodale} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{S}^d, f(-x) = -f(x).$$



Idee clé : **espaces** munis d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($x \mapsto -x$).

Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

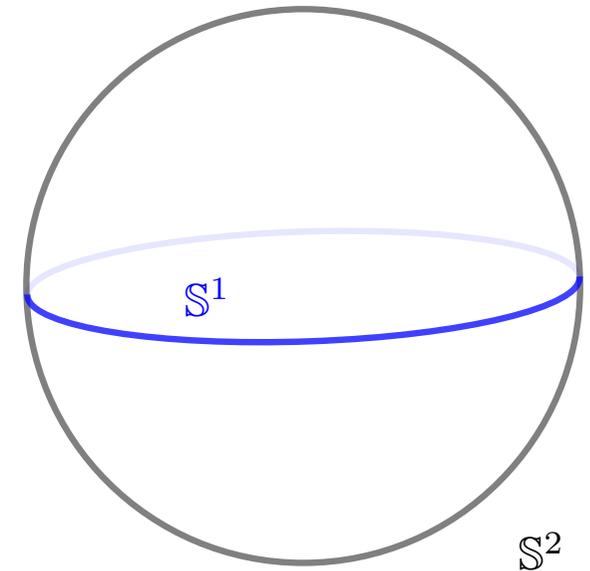
$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

$$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \text{ pour Van Kampen-Flores.}$$

Borsuk-Ulam. Pour $1 \leq k < d$, il n'existe pas d'application continue et antipodale $\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^k$.

$$\mathbb{S}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}.$$

$$f \text{ antipodale} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{S}^d, f(-x) = -f(x).$$



Idee clé : espaces munis d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($x \mapsto -x$).

Supposons $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ayant une certaine propriété d'injectivité.

Idée

Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

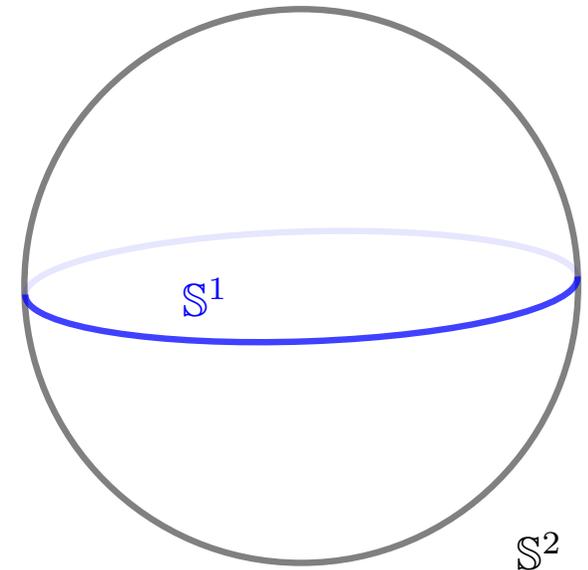
$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

$$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \text{ pour Van Kampen-Flores.}$$

Borsuk-Ulam. Pour $1 \leq k < d$, il n'existe pas d'application continue et antipodale $\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^k$.

$$\mathbb{S}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}.$$

$$f \text{ antipodale} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{S}^d, f(-x) = -f(x).$$



Idee clé : espaces munis d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($x \mapsto -x$).

Supposons $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ayant une certaine propriété d'injectivité.

$$\hat{f} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} X \times X & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ (x, y) & \mapsto & \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|} \end{cases}$$

Idée

Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

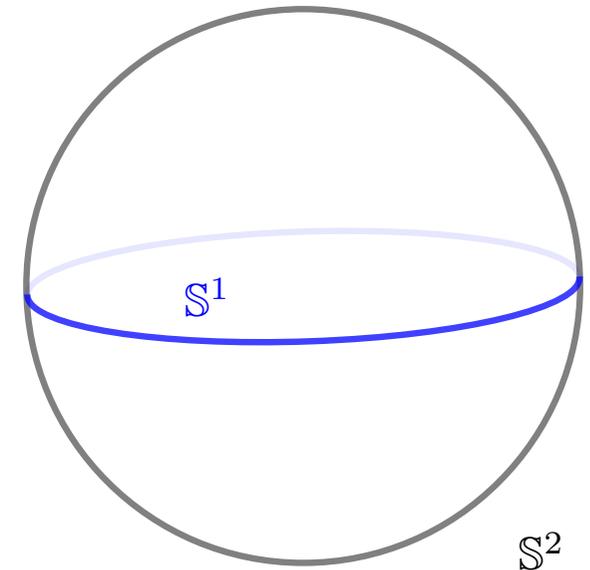
$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

$$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \text{ pour Van Kampen-Flores.}$$

Borsuk-Ulam. Pour $1 \leq k < d$, il n'existe pas d'application continue et antipodale $\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^k$.

$$\mathbb{S}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}.$$

$$f \text{ antipodale} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{S}^d, f(-x) = -f(x).$$



Idee clé : espaces munis d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($x \mapsto -x$).

Supposons $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ayant une certaine propriété d'injectivité.

$$\hat{f} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} X \times X & \rightarrow \mathbb{S}^{d-1} \\ (x, y) & \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|} \end{cases}$$

Idée

Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

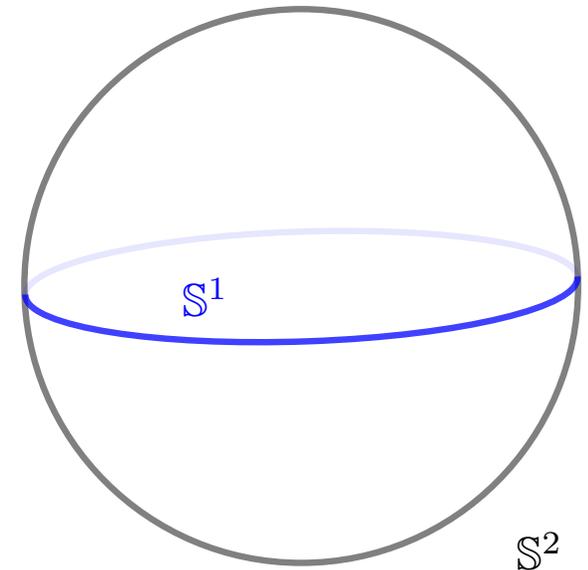
$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

$$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \text{ pour Van Kampen-Flores.}$$

Borsuk-Ulam. Pour $1 \leq k < d$, il n'existe pas d'application continue et antipodale $\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^k$.

$$\mathbb{S}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}.$$

$$f \text{ antipodale} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{S}^d, f(-x) = -f(x).$$



Idee clé : espaces munis d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($x \mapsto -x$).

Idée

Supposons $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ayant une certaine propriété d'injectivité.

$$\hat{f} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} X \times X & \rightarrow \mathbb{S}^{d-1} \\ (x, y) & \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|} \end{cases}$$

(1) Exclure de $X \times X$ les (x, y) pour lesquels on autorise $f(x) = f(y)$.

Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

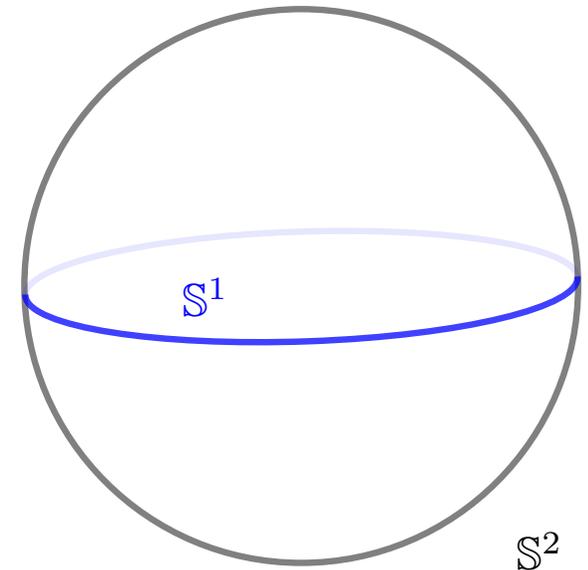
$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

$$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \text{ pour Van Kampen-Flores.}$$

Borsuk-Ulam. Pour $1 \leq k < d$, il n'existe pas d'application continue et antipodale $\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^k$.

$$\mathbb{S}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}.$$

$$f \text{ antipodale} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{S}^d, f(-x) = -f(x).$$



Idee clé : espaces munis d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($x \mapsto -x$).

Idée

Supposons $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ayant une certaine propriété d'injectivité.

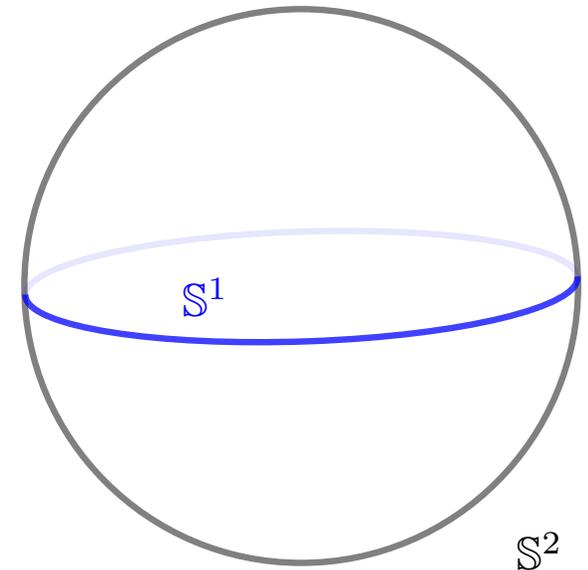
$$\hat{f} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Y \subseteq X \times X \rightarrow & \mathbb{S}^{d-1} \\ (x, y) \mapsto & \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|} \end{cases}$$

(1) Exclure de $X \times X$ les (x, y) pour lesquels on autorise $f(x) = f(y)$.

Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

$$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \text{ pour Van Kampen-Flores.}$$



Borsuk-Ulam. Pour $1 \leq k < d$, il n'existe pas d'application continue et antipodale $S^d \rightarrow S^k$.

$$S^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}.$$

$$f \text{ antipodale} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in S^d, f(-x) = -f(x).$$

Idee clé : espaces munis d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($x \mapsto -x$).

Idée

Supposons $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ayant une certaine propriété d'injectivité.

$$\hat{f} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Y \subseteq X \times X \rightarrow & S^{d-1} \\ (x, y) \mapsto & \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|} \end{cases}$$

(1) Exclure de $X \times X$ les (x, y) pour lesquels on autorise $f(x) = f(y)$.

(2) Munir Y de la symétrie $- \stackrel{\text{def}}{=} (x, y) \mapsto (y, x)$.

$$\hat{f}(y, x) = -\hat{f}(x, y).$$

Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

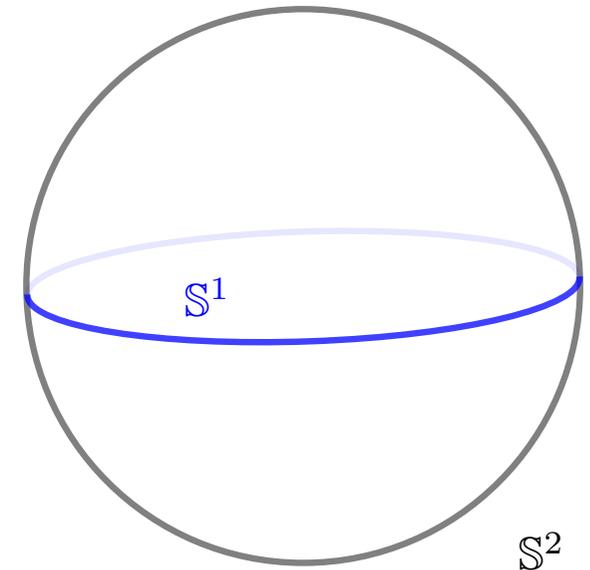
$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

$$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \text{ pour Van Kampen-Flores.}$$

Borsuk-Ulam. Pour $1 \leq k < d$, il n'existe pas d'application continue et antipodale $\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^k$.

$$\mathbb{S}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}.$$

$$f \text{ antipodale} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{S}^d, f(-x) = -f(x).$$



Idee clé : espaces munis d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($x \mapsto -x$).

Supposons $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ayant une certaine propriété d'injectivité.

$$\hat{f} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Y \subseteq X \times X \rightarrow & \mathbb{S}^{d-1} \\ (x, y) \mapsto & \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|} \end{cases}$$

- (1) Exclure de $X \times X$ les (x, y) pour lesquels on autorise $f(x) = f(y)$.
- (2) Munir Y de la symétrie $- \stackrel{\text{def}}{=} (x, y) \mapsto (y, x)$.

$$\hat{f}(y, x) = -\hat{f}(x, y).$$

Si $(Y, -) \simeq (\mathbb{S}^\bullet, -)$ avec $\bullet > d - 1$ on applique **B-U**,

Idée

Radon (topologique) et **Van Kampen-Flores** énoncent qu'il n'existe pas d'applications (d'un certain type) entre (certains) espaces.

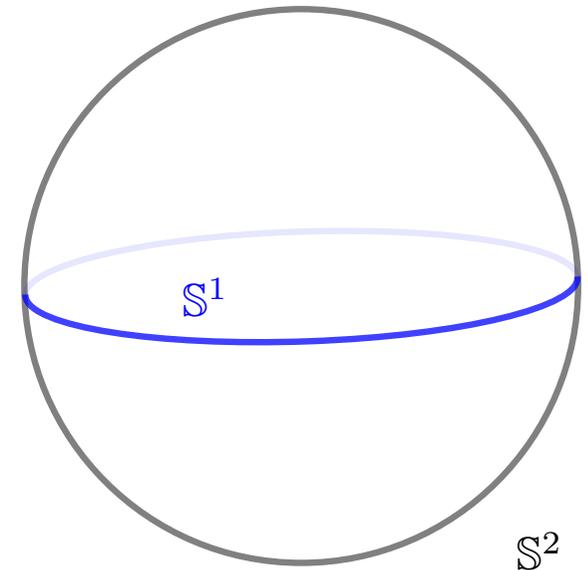
$$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ pour Radon (topologique),}$$

$$\|\Delta_{2d+2}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \text{ pour Van Kampen-Flores.}$$

Borsuk-Ulam. Pour $1 \leq k < d$, il n'existe pas d'application continue et antipodale $\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^k$.

$$\mathbb{S}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}.$$

$$f \text{ antipodale} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{S}^d, f(-x) = -f(x).$$



Idee clé : espaces munis d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($x \mapsto -x$).

Idée

Supposons $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ayant une certaine propriété d'injectivité.

$$\hat{f} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Y \subseteq X \times X \rightarrow & \mathbb{S}^{d-1} \\ (x, y) \mapsto & \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|} \end{cases}$$

(1) Exclure de $X \times X$ les (x, y) pour lesquels on autorise $f(x) = f(y)$.

(2) Munir Y de la symétrie $- \stackrel{\text{def}}{=} (x, y) \mapsto (y, x)$.

$$\hat{f}(y, x) = -\hat{f}(x, y).$$

Si $(Y, -) \simeq (\mathbb{S}^\bullet, -)$ avec $\bullet > d - 1$ on applique **B-U**, sinon on l'étend !

Radon & Helly topologiques

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$,
il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$,
il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$,
il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$,
il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$,
il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=} \text{famille finie } \mathcal{F} \text{ d'ouverts t. q. } \forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F},$
 $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

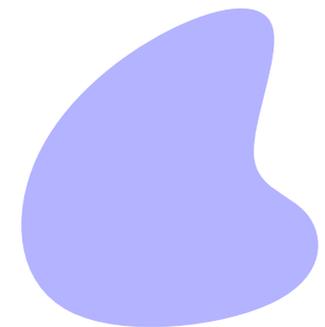
Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=}$ famille finie \mathcal{F} d'ouverts t. q. $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

X **contractile** \Rightarrow toute application $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ se prolonge en $\mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$.

\uparrow
la boule unité de \mathbb{R}^{k+1}



Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

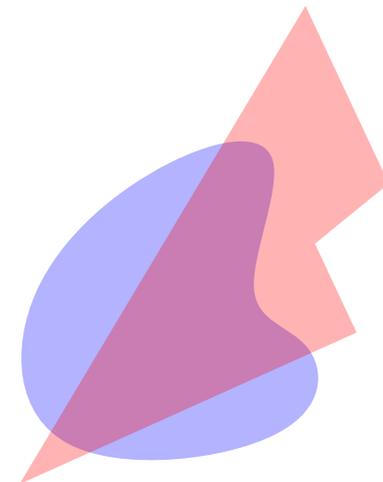
Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=} \text{famille finie } \mathcal{F} \text{ d'ouverts t. q. } \forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F},$
 $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

X **contractile** \Rightarrow toute application $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ se prolonge en $\mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$.

\uparrow
la boule unité de \mathbb{R}^{k+1}



Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

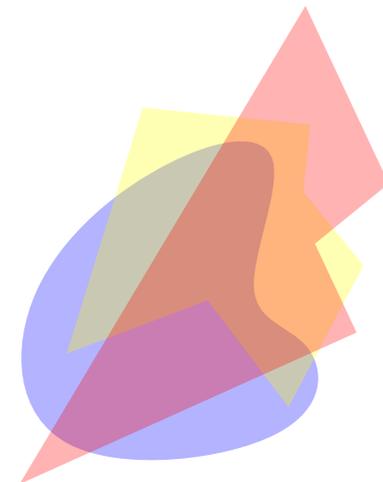
Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=}$ famille finie \mathcal{F} d'ouverts t. q. $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

X **contractile** \Rightarrow toute application $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ se prolonge en $\mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$.

\uparrow
la boule unité de \mathbb{R}^{k+1}



Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

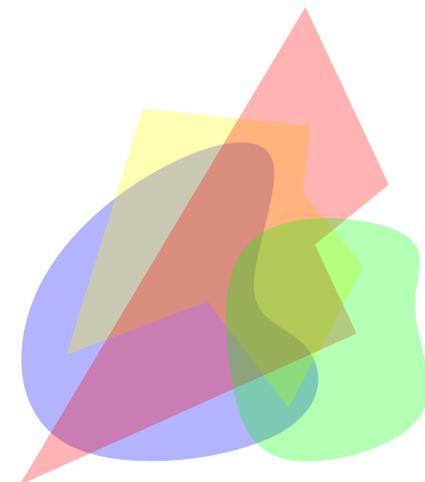
Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=}$ famille finie \mathcal{F} d'ouverts t. q. $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

X **contractile** \Rightarrow toute application $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ se prolonge en $\mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$.

la boule unité de \mathbb{R}^{k+1}



Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

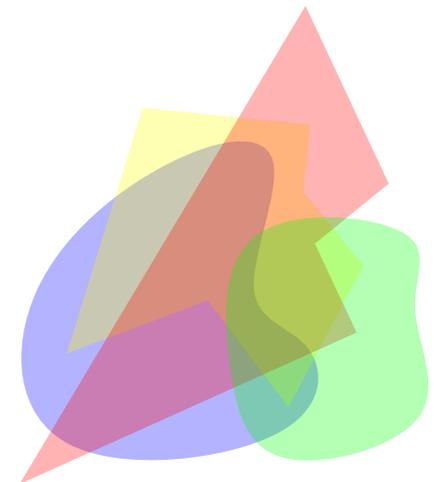
Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=}$ famille finie \mathcal{F} d'ouverts t. q. $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

X **contractile** \Rightarrow toute application $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ se prolonge en $\mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$.

la boule unité de \mathbb{R}^{k+1}



Idée

Radon topologique \Rightarrow **Helly topologique** presque comme en convexe.

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

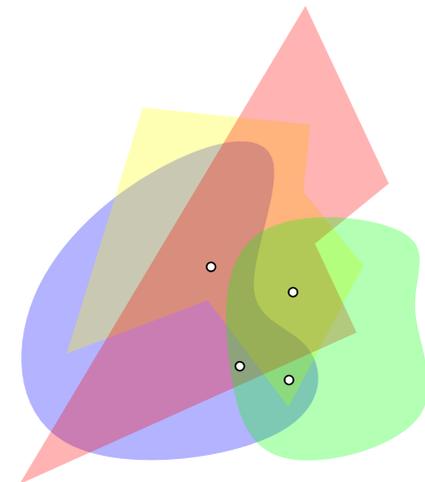
Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=}$ famille finie \mathcal{F} d'ouverts t. q. $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

X **contractile** \Rightarrow toute application $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ se prolonge en $\mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$.

la boule unité de \mathbb{R}^{k+1}



Idée

Radon topologique \Rightarrow **Helly topologique** presque comme en convexe.

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

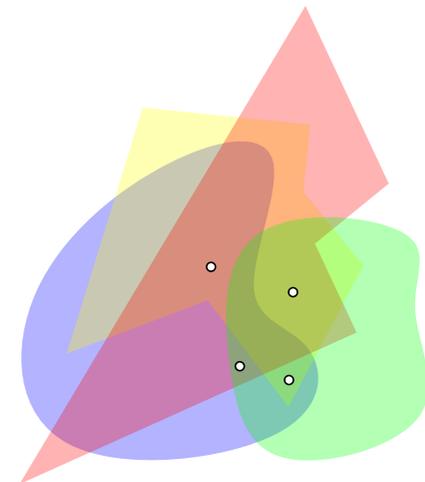
Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=}$ famille finie \mathcal{F} d'ouverts t. q. $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

X **contractile** \Rightarrow toute application $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ se prolonge en $\mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$.

la boule unité de \mathbb{R}^{k+1}



Idée

Radon topologique \Rightarrow **Helly topologique** presque comme en convexe.
Construire une application $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ **compatible** avec \mathcal{F} .

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

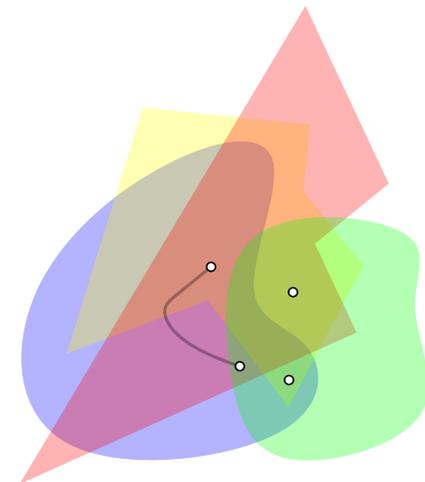
Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=}$ famille finie \mathcal{F} d'ouverts t. q. $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

X **contractile** \Rightarrow toute application $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ se prolonge en $\mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$.

la boule unité de \mathbb{R}^{k+1}



Idée

Radon topologique \Rightarrow **Helly topologique** presque comme en convexe.
Construire une application $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ **compatible** avec \mathcal{F} .

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

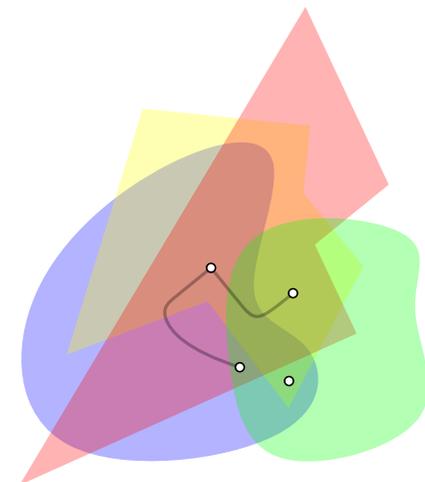
Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=}$ famille finie \mathcal{F} d'ouverts t. q. $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

X **contractile** \Rightarrow toute application $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ se prolonge en $\mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$.

la boule unité de \mathbb{R}^{k+1}



Idée

Radon topologique \Rightarrow **Helly topologique** presque comme en convexe.
Construire une application $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ **compatible** avec \mathcal{F} .

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

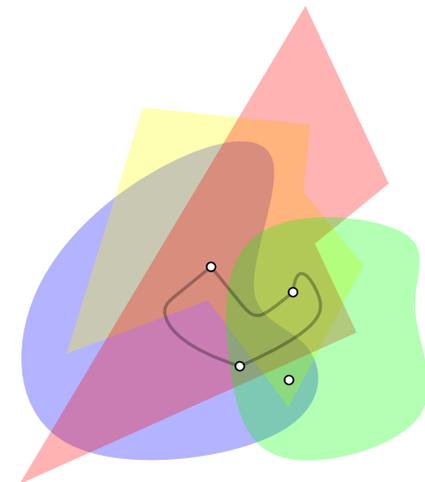
Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=}$ famille finie \mathcal{F} d'ouverts t. q. $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

X **contractile** \Rightarrow toute application $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ se prolonge en $\mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$.

la boule unité de \mathbb{R}^{k+1}



Idée

Radon topologique \Rightarrow **Helly topologique** presque comme en convexe.
Construire une application $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ **compatible** avec \mathcal{F} .

Radon topologique. $\forall d \geq 1$, pour toute application $f : \|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe $\sigma, \sigma' \in \Delta_{d+1}^{(d)}$ **disjoints** tels que $f(\sigma) \cap f(\sigma') \neq \emptyset$.

Idée

$\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| = \partial\|\Delta_{d+1}^{(d+1)}\| \simeq \mathbb{S}^d$. Donc $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Borsuk-Ulam $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}^d$ t. q. $f(x) = f(-x)$ (classique).

On envoie \mathbb{S}^d sur $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\|$ (\simeq triangulation) de sorte que les points antipodaux soient dans des simplexes disjoints.

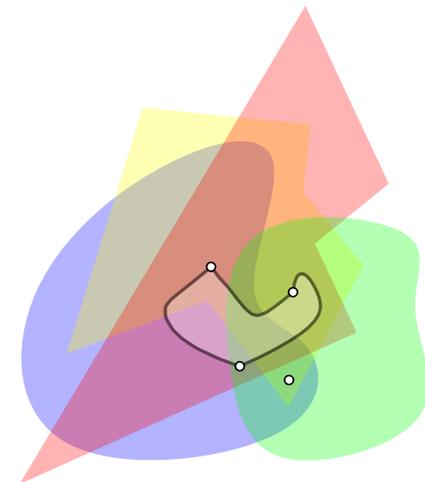
Helly topologique. Soit \mathcal{F} une **bonne couverture** de \mathbb{R}^d .

Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, alors il existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{G}| \leq d + 1$ et $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Bonne couverture $\stackrel{\text{def}}{=}$ famille finie \mathcal{F} d'ouverts t. q. $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcap \mathcal{G}$ est vide ou **contractile**.

X **contractile** \Rightarrow toute application $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ se prolonge en $\mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$.

la boule unité de \mathbb{R}^{k+1}



Idée

Radon topologique \Rightarrow **Helly topologique** presque comme en convexe.
Construire une application $\|\Delta_{d+1}^{(d)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ **compatible** avec \mathcal{F} .

Bonus : nombres chromatiques des graphes de Kneser

changement de transparents

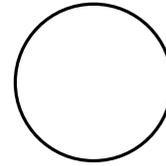
Bonus : nombres chromatiques des graphes de Kneser

Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.

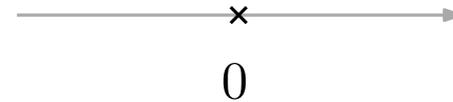
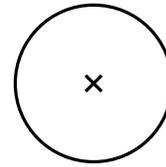
Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



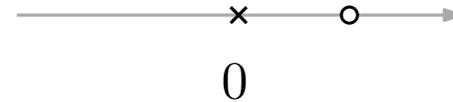
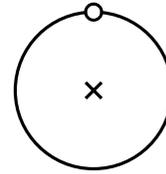
Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



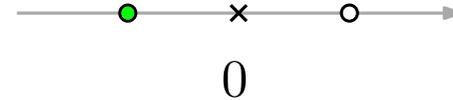
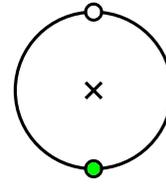
Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



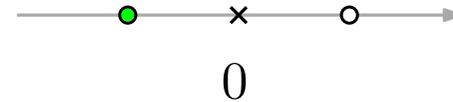
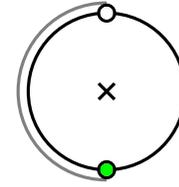
Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



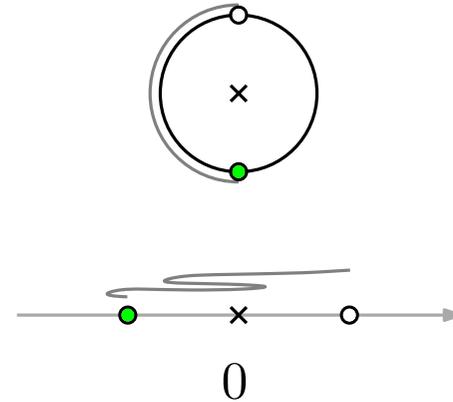
Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



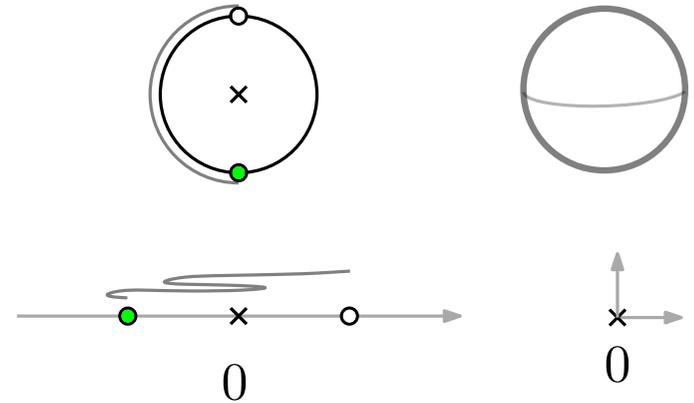
Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



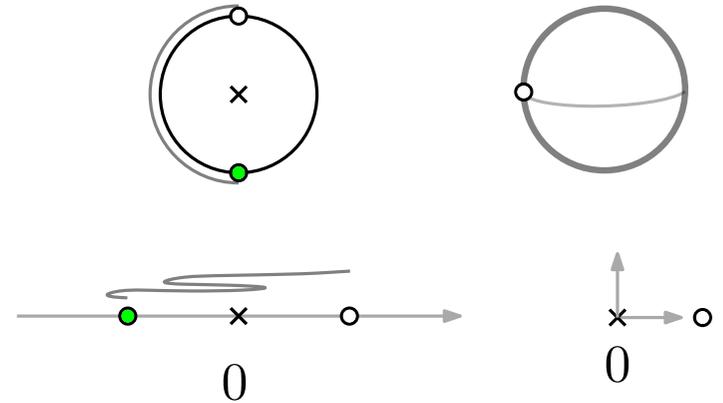
Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



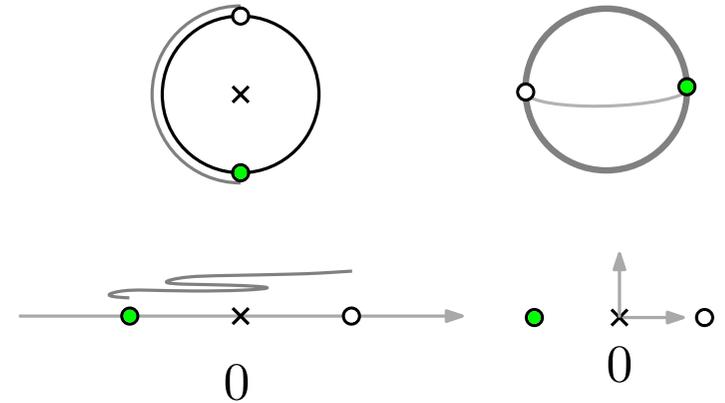
Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



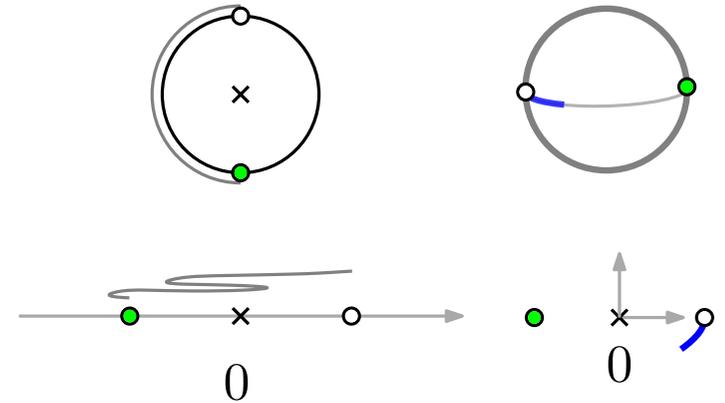
Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



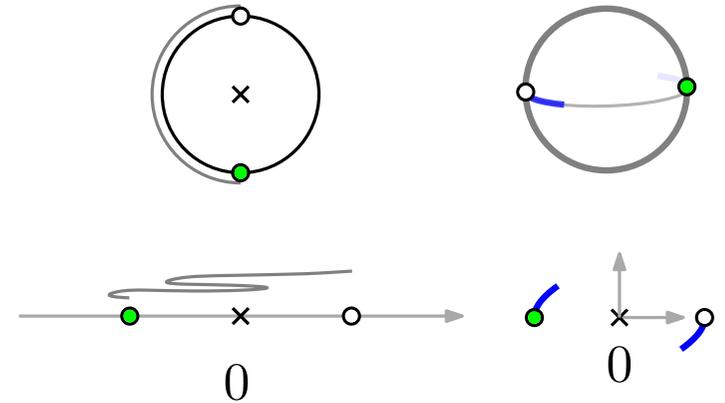
Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



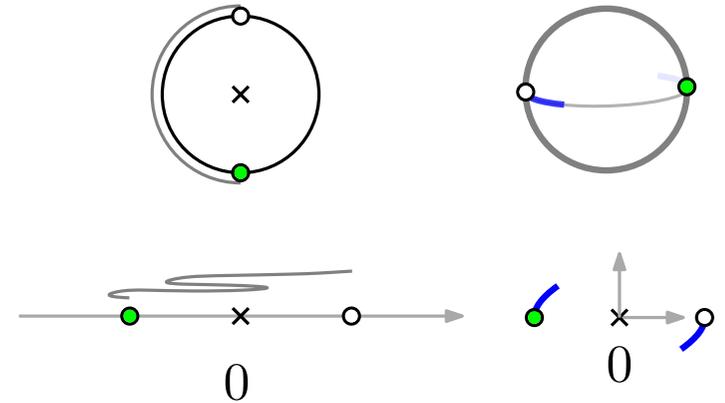
Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



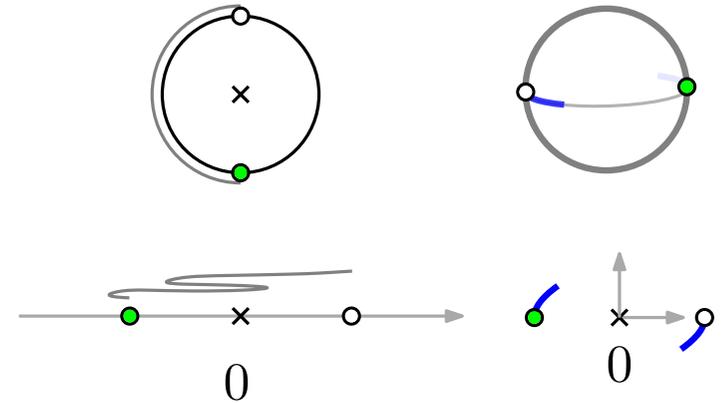
Borne inférieure sur les **nombre chromatiques** des graphes de Kneser.

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$$

Sommets $\binom{[n]}{k}$, arêtes entre parties disjointes.

Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.

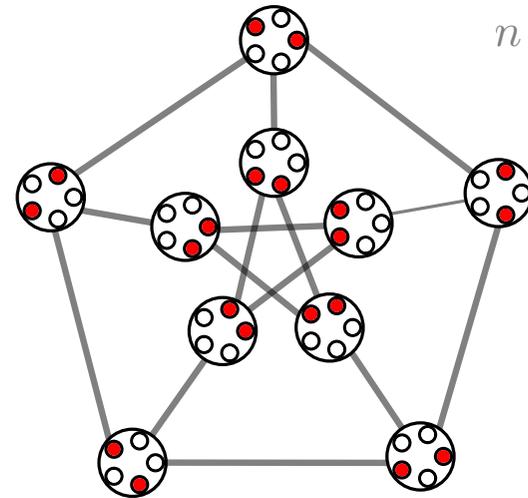


Borne inférieure sur les **nombre chromatiques** des graphes de Kneser.

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$$

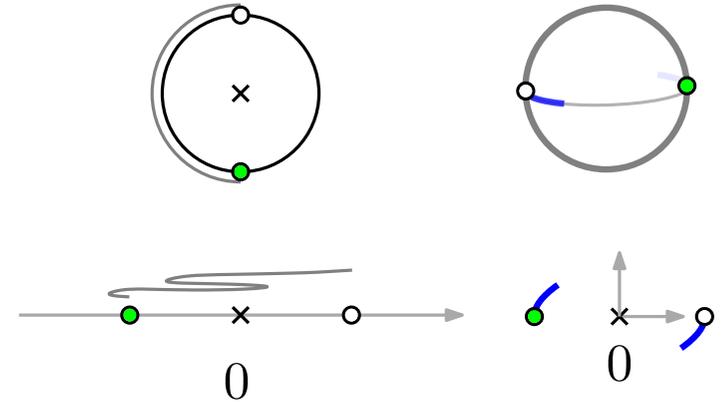
Sommets $\binom{[n]}{k}$, arêtes entre parties disjointes.

$$n = 5, k = 2$$



Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



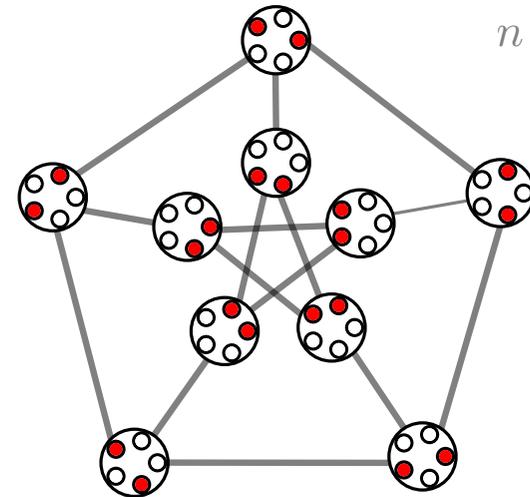
Borne inférieure sur les **nombre chromatiques** des graphes de Kneser.

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$$

Sommets $\binom{[n]}{k}$, arêtes entre parties disjointes.

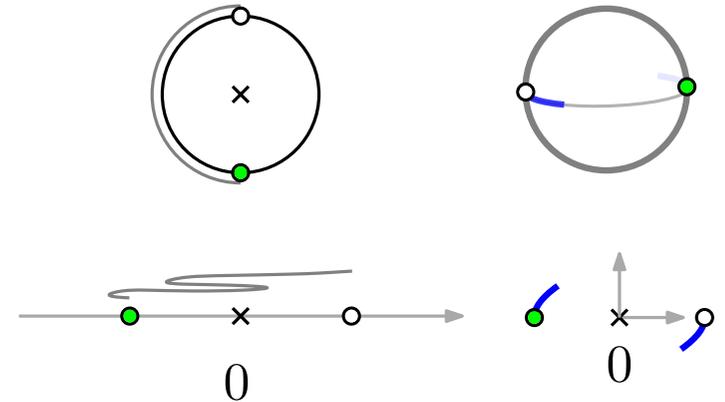
Colorier les sous-ensembles de taille k de $[n]$
t. q. les ensembles de même couleur se coupent.

$$n = 5, k = 2$$



Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



Borne inférieure sur les **nombre chromatiques** des graphes de Kneser.

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$$

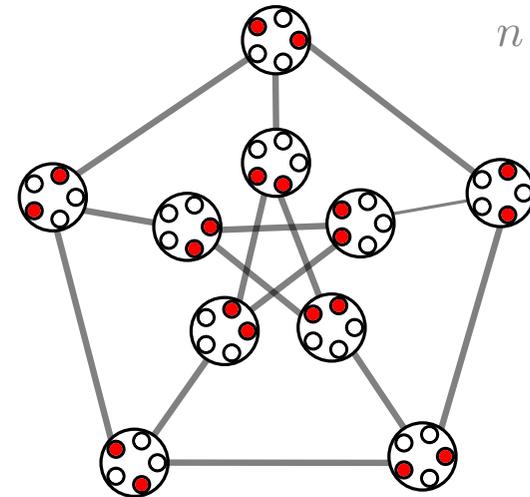
Sommets $\binom{[n]}{k}$, arêtes entre parties disjointes.

Colorier les sous-ensembles de taille k de $[n]$ t. q. les ensembles de même couleur se coupent.

$S \in \binom{[n]}{k} \mapsto \max(S)$ est une coloration propre.

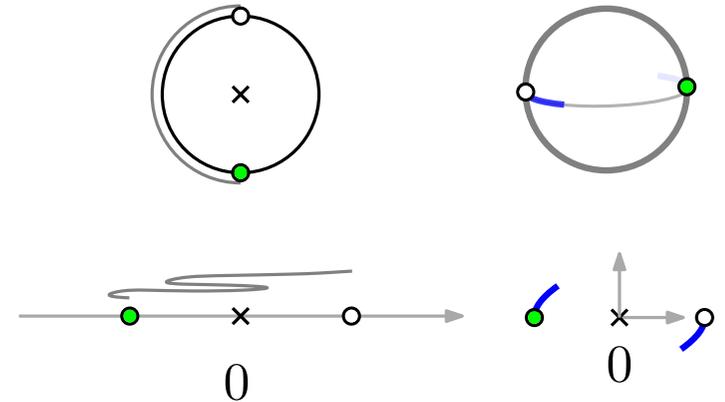
$n - k + 1$ couleurs

$n = 5, k = 2$



Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



Borne inférieure sur les **nombre chromatiques** des graphes de Kneser.

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$$

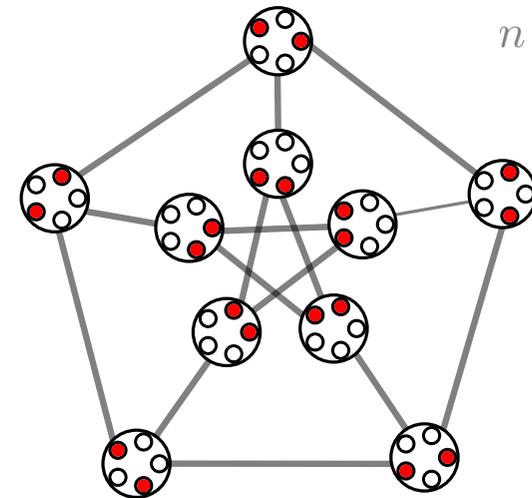
Sommets $\binom{[n]}{k}$, arêtes entre parties disjointes.

Colorier les sous-ensembles de taille k de $[n]$
t. q. les ensembles de même couleur se coupent.

$S \in \binom{[n]}{k} \mapsto \max(S)$ est une coloration propre.

$n - k + 1$ couleurs

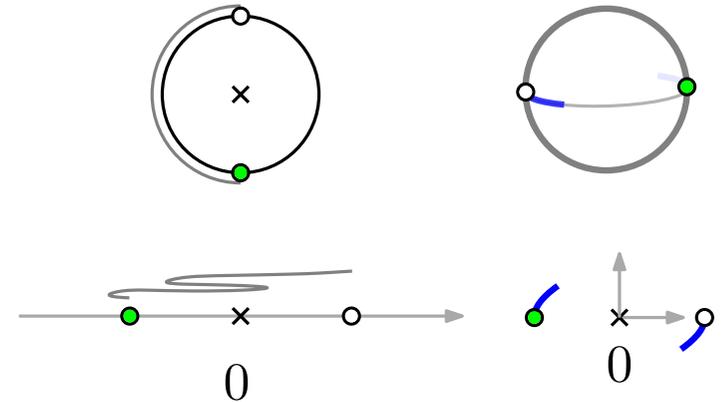
$S \in \binom{[n]}{k} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } S \subseteq [2k - 1] \\ \max(S) & \text{sinon} \end{cases}$ marche aussi.



$n = 5, k = 2$

Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



Borne inférieure sur les **nombre chromatiques** des graphes de Kneser.

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$$

Sommets $\binom{[n]}{k}$, arêtes entre parties disjointes.

Colorier les sous-ensembles de taille k de $[n]$ t. q. les ensembles de même couleur se coupent.

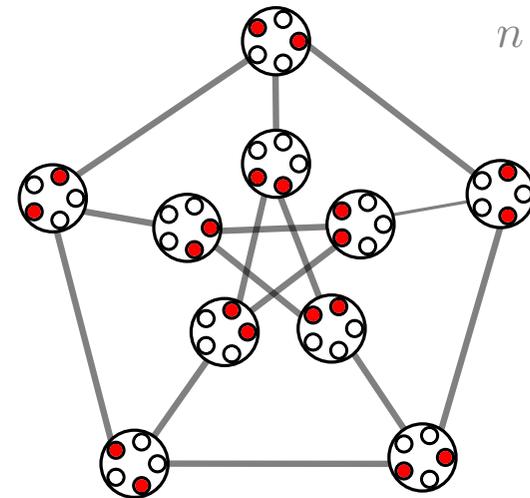
$S \in \binom{[n]}{k} \mapsto \max(S)$ est une coloration propre.

$n - k + 1$ couleurs

$S \in \binom{[n]}{k} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } S \subseteq [2k - 1] \\ \max(S) & \text{sinon} \end{cases}$ marche aussi.

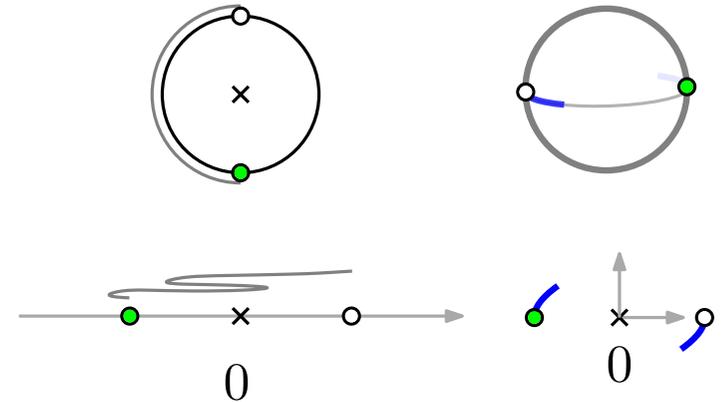
$n - (2k - 1) + 1 = n - 2k + 2$ couleurs

$n = 5, k = 2$



Borsuk-Ulam. Pour toute application $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et antipodale, il existe \vec{x} t. q. $f(\vec{x}) = 0$.

Équivalent à la précédente formulation.



Borne inférieure sur les **nombre chromatiques** des graphes de Kneser.

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$$

Sommets $\binom{[n]}{k}$, arêtes entre parties disjointes.

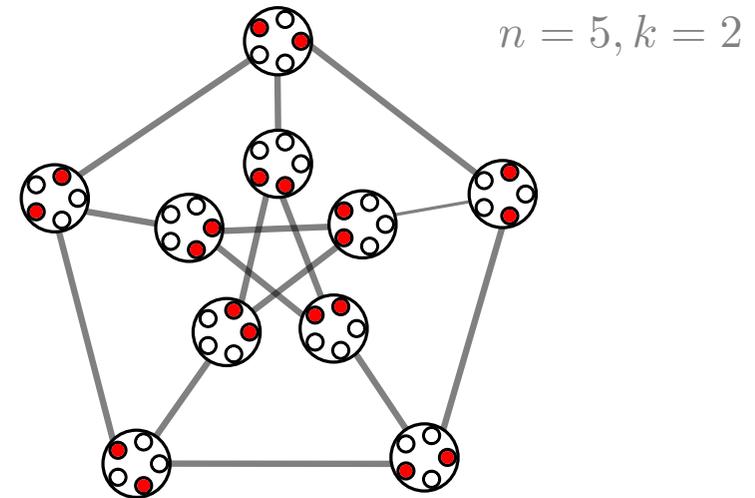
Colorier les sous-ensembles de taille k de $[n]$
t. q. les ensembles de même couleur se coupent.

$S \in \binom{[n]}{k} \mapsto \max(S)$ est une coloration propre.

$n - k + 1$ couleurs

$S \in \binom{[n]}{k} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } S \subseteq [2k - 1] \\ \max(S) & \text{sinon} \end{cases}$ marche aussi.

$n - (2k - 1) + 1 = n - 2k + 2$ couleurs



← optimal !

Systeme d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} \text{fonction continue et antipodale } f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

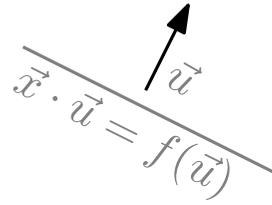
Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue et antipodale $f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.



Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

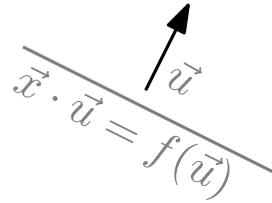


Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.

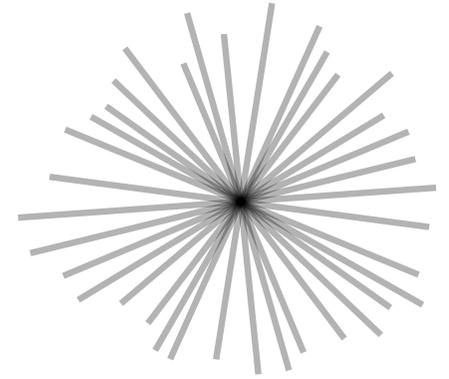
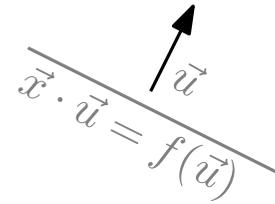


Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.

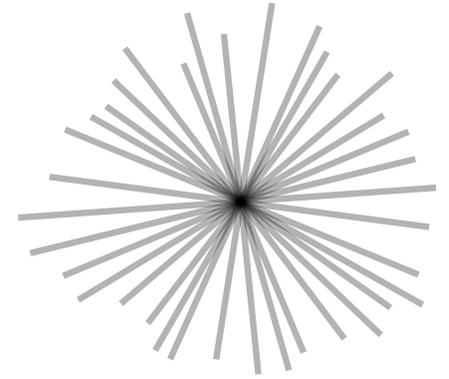
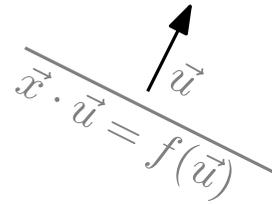


Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.

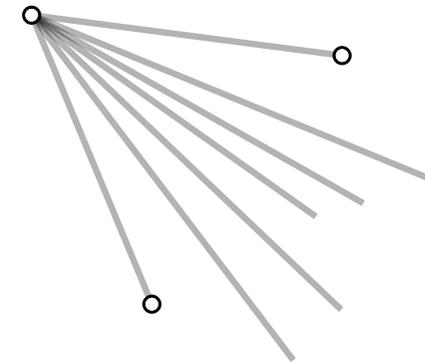
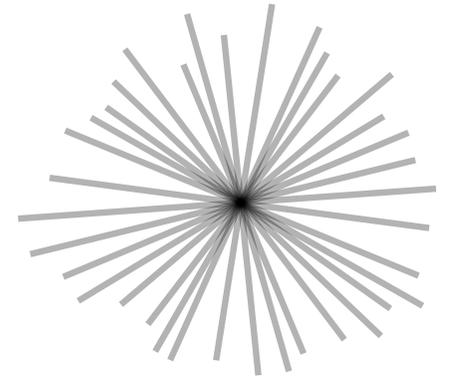
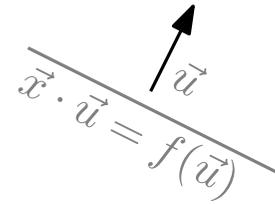


Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue et antipodale $f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.

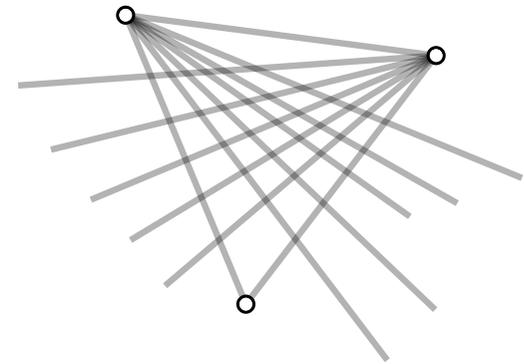
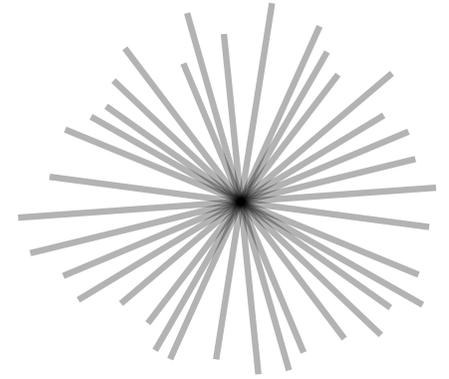
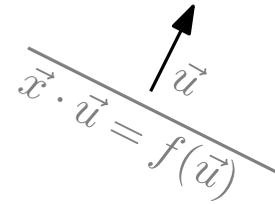


Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue et antipodale $f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.

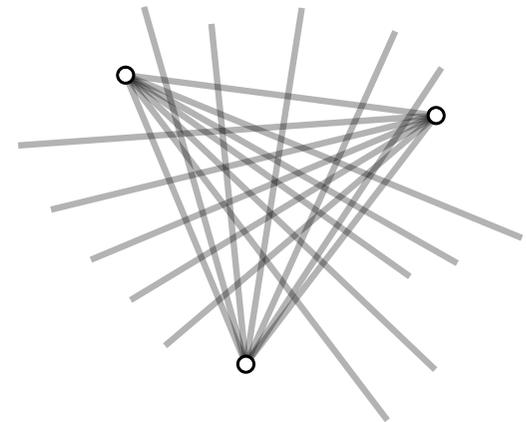
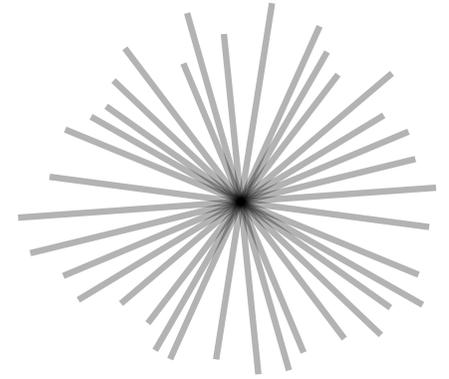
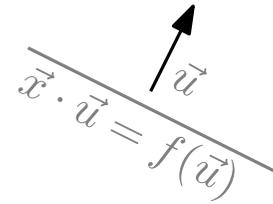


Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue et antipodale $f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.

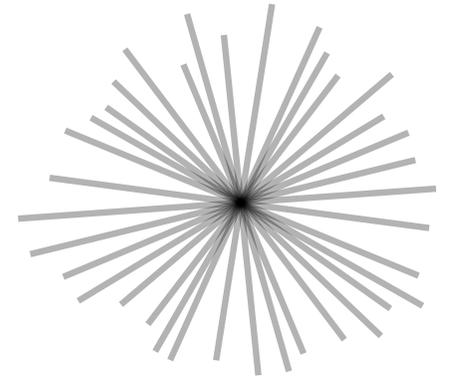
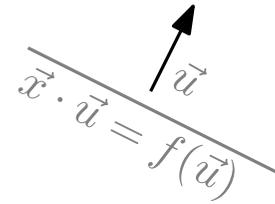


Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue et antipodale $f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

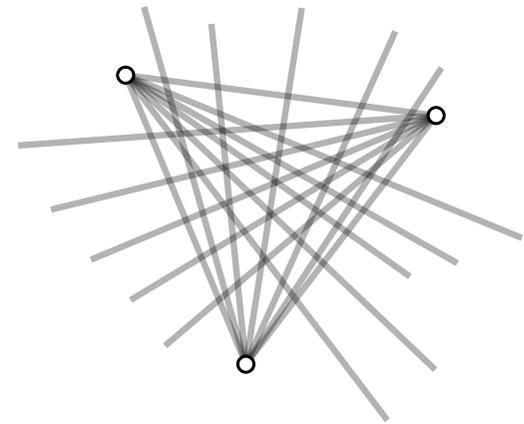
Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.



Dol'nikov. d systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d ont toujours un hyperplan commun.

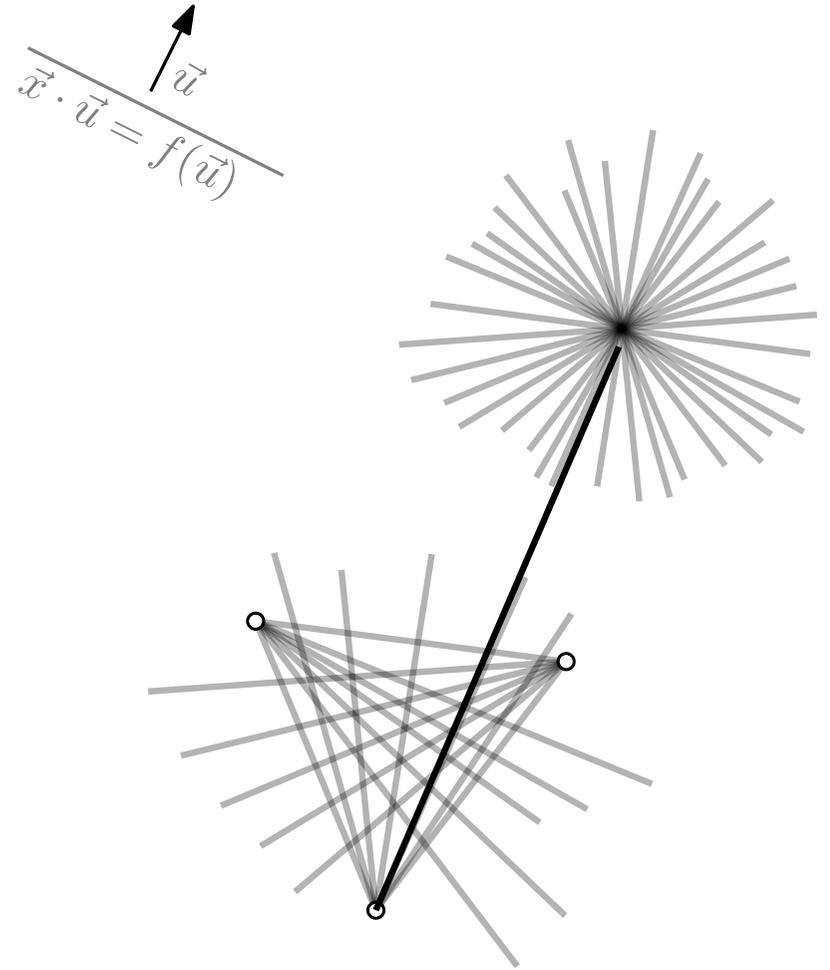


Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue et antipodale $f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.



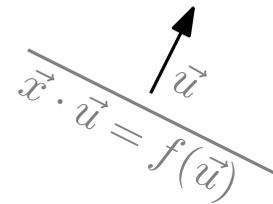
Dol'nikov. d systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d ont toujours un hyperplan commun.

Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f$ fonction continue et antipodale $f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

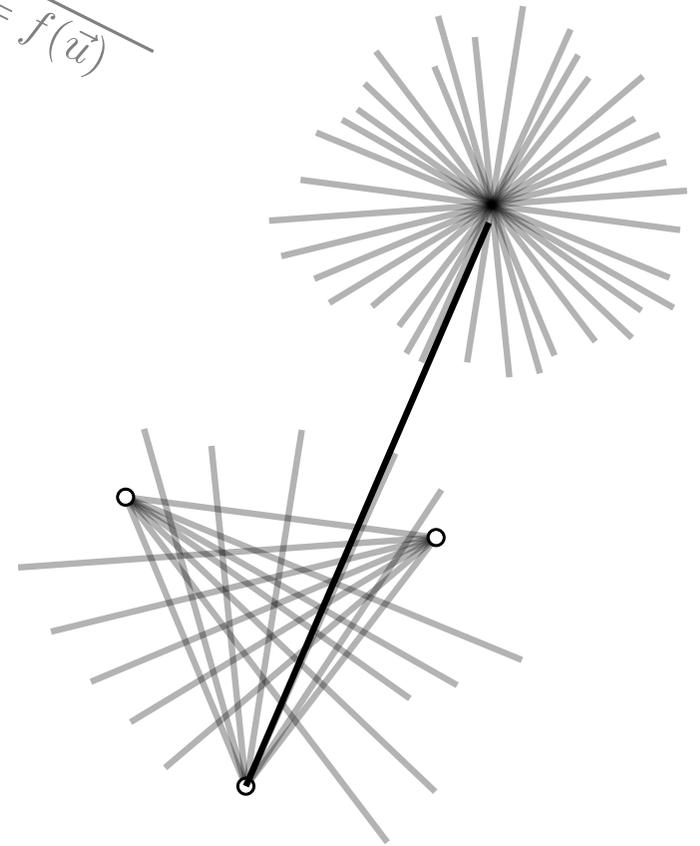
L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.



Dol'nikov. d systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d
ont toujours un hyperplan commun.

f_1, f_2, \dots, f_d des systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d .



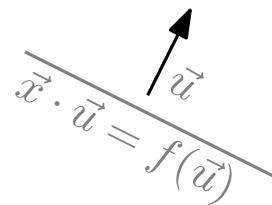
Preuve

Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f$ fonction continue et antipodale $f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

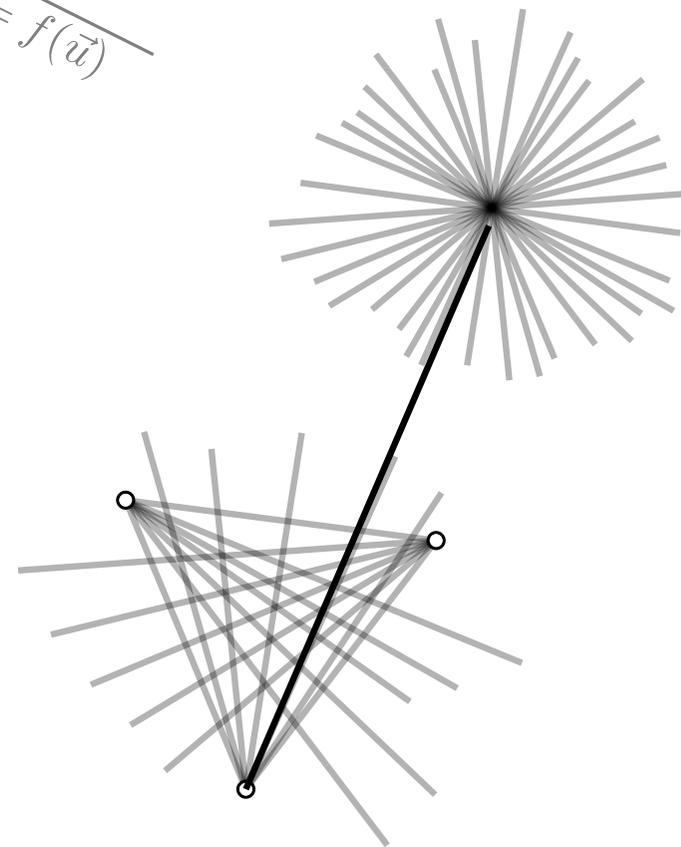
\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.



Dol'nikov. d systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d
ont toujours un hyperplan commun.

f_1, f_2, \dots, f_d des systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d .

$\phi \stackrel{\text{def}}{=} (f_1 - f_d, f_2 - f_d, \dots, f_{d-1} - f_d)$.



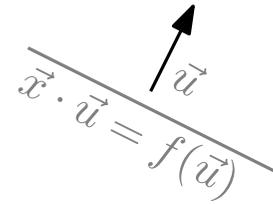
Preuve

Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.

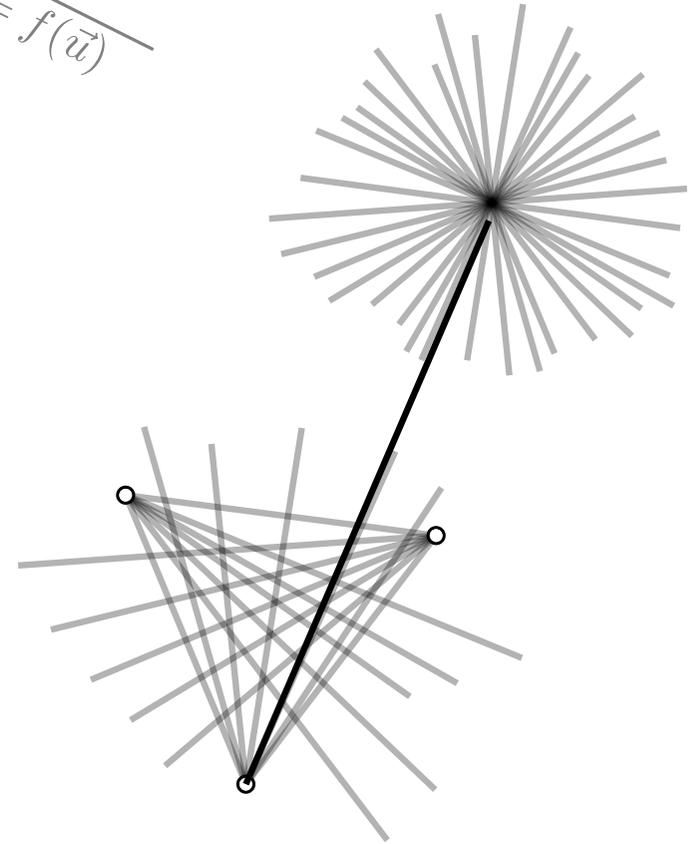


Dol'nikov. d systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d
ont toujours un hyperplan commun.

f_1, f_2, \dots, f_d des systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d .

$\phi \stackrel{\text{def}}{=} (f_1 - f_d, f_2 - f_d, \dots, f_{d-1} - f_d)$.

$\phi: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ est continue et antipodale,



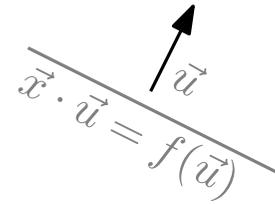
Preuve

Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f$ fonction continue et antipodale $f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.



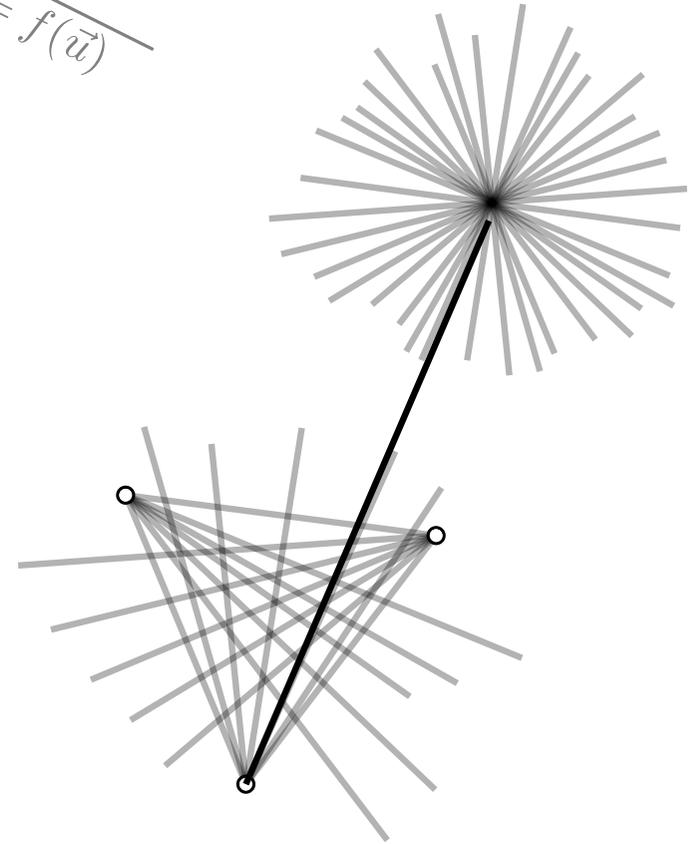
Dol'nikov. d systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d ont toujours un hyperplan commun.

f_1, f_2, \dots, f_d des systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d .

$\phi \stackrel{\text{def}}{=} (f_1 - f_d, f_2 - f_d, \dots, f_{d-1} - f_d)$.

$\phi: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ est continue et antipodale,

Borsuk-Ulam \Rightarrow il existe \vec{u} t. q. $\phi(\vec{u}) = \vec{0}$.



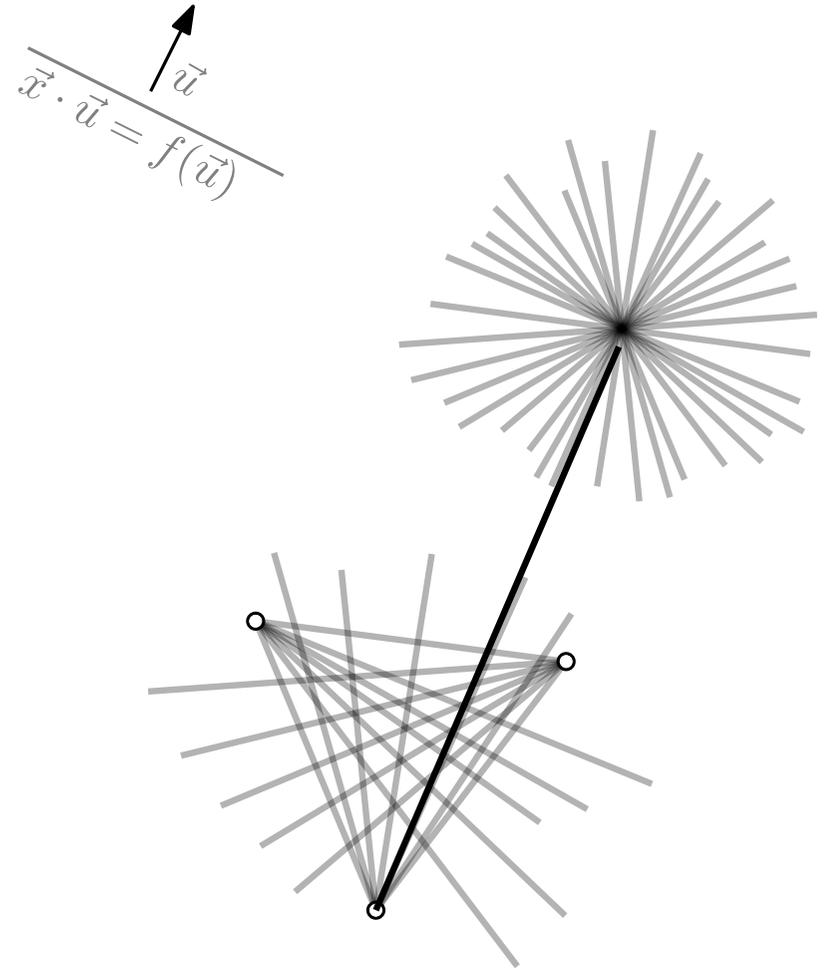
Preuve

Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f$ fonction continue et antipodale $f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.



Dol'nikov. d systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d ont toujours un hyperplan commun.

f_1, f_2, \dots, f_d des systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d .

$\phi \stackrel{\text{def}}{=} (f_1 - f_d, f_2 - f_d, \dots, f_{d-1} - f_d)$.

$\phi: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ est continue et antipodale,

Borsuk-Ulam \Rightarrow il existe \vec{u} t. q. $\phi(\vec{u}) = \vec{0}$.

$f_1(\vec{u}) = f_d(\vec{u}) = f_2(\vec{u}) = \dots = f_{d-1}(\vec{u})$

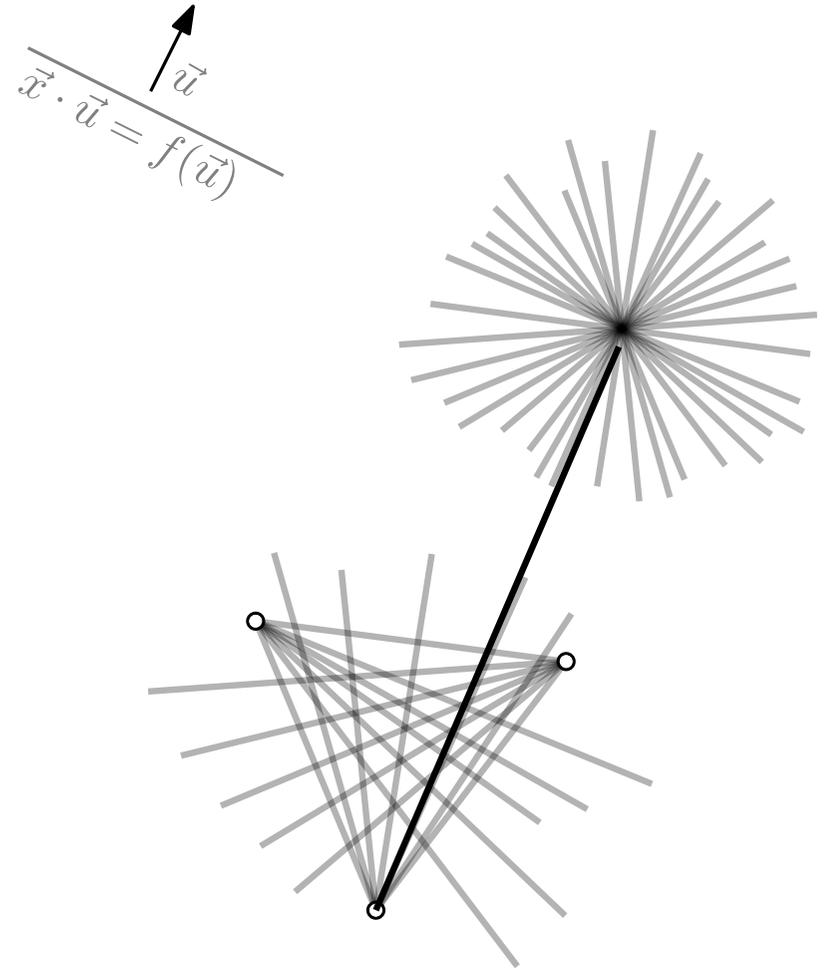
Preuve

Système d'hyperplans de $\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} f$ fonction continue et antipodale $f: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un hyperplan dans chaque direction $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

L'hyperplan dépend continûment de la direction.

\vec{u} et $-\vec{u}$ définissent le même hyperplan.



Dol'nikov. d systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d
ont toujours un hyperplan commun.

f_1, f_2, \dots, f_d des systèmes d'hyperplans de \mathbb{R}^d .

$\phi \stackrel{\text{def}}{=} (f_1 - f_d, f_2 - f_d, \dots, f_{d-1} - f_d)$.

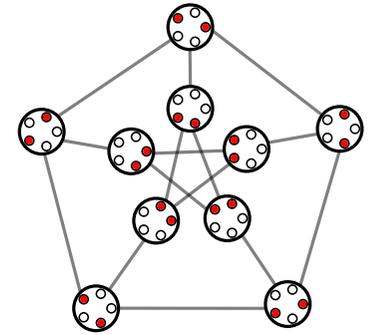
$\phi: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ est continue et antipodale,

Borsuk-Ulam \Rightarrow il existe \vec{u} t. q. $\phi(\vec{u}) = \vec{0}$.

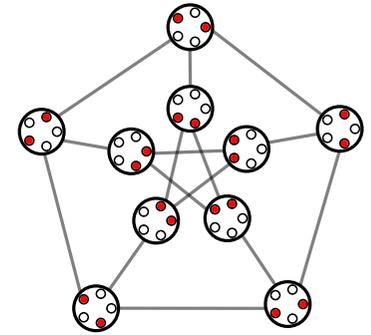
$f_1(\vec{u}) = f_d(\vec{u}) = f_2(\vec{u}) = \dots = f_{d-1}(\vec{u}) \quad \square$

Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



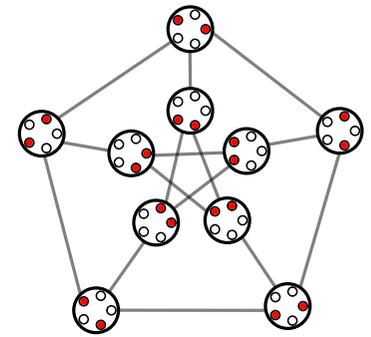
Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



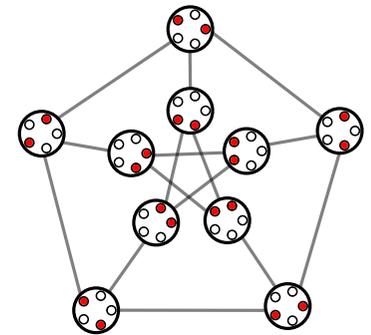
$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$n = 5, k=2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45

Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

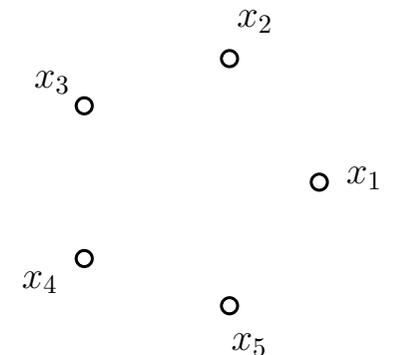
$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

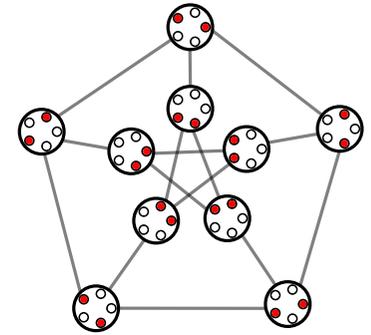
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45

Preuve



Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

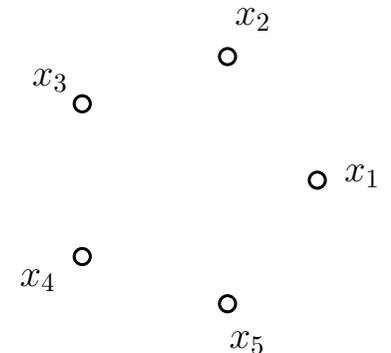
$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \\ \Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset$$

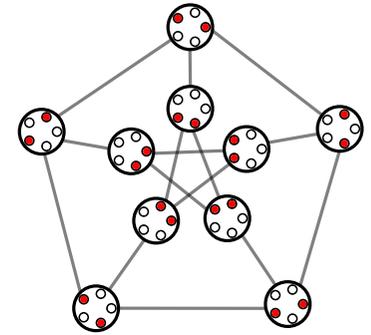
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

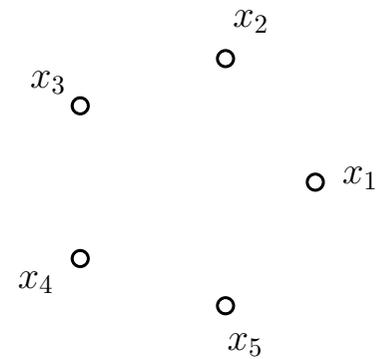
Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset.$$

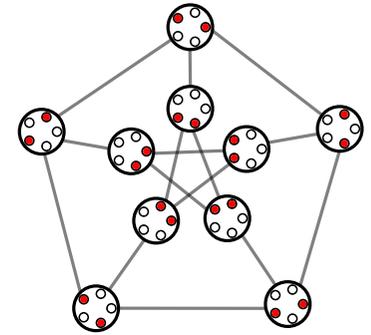
$n = 5, k = 2$

- 12, 13, 14, 15, 23
- 24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

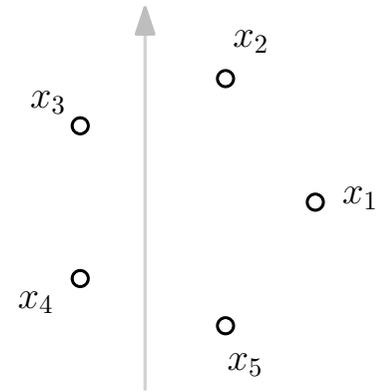
$$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset.$$

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

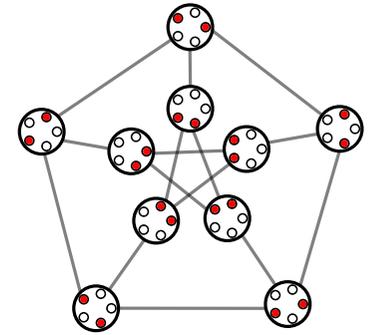
$n = 5, k=2$

- 12, 13, 14, 15, 23
- 24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

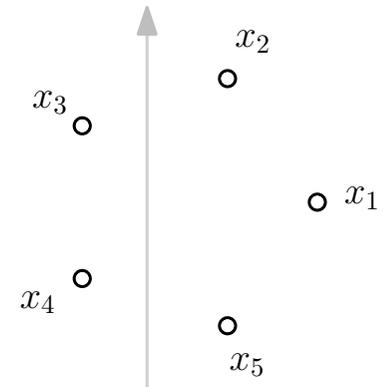
$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset$.

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$

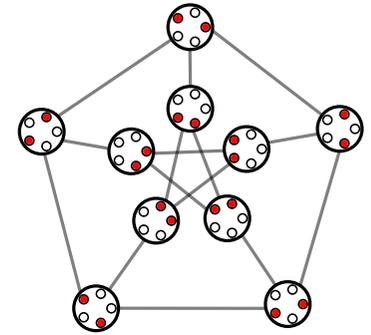
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

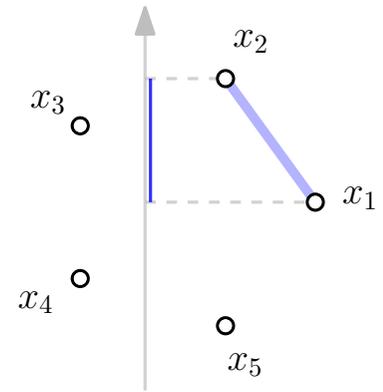
$$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset.$$

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$

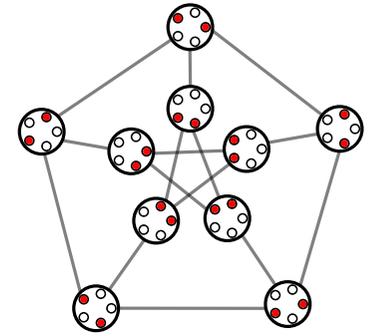
$n = 5, k = 2$

- 12, 13, 14, 15, 23
- 24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

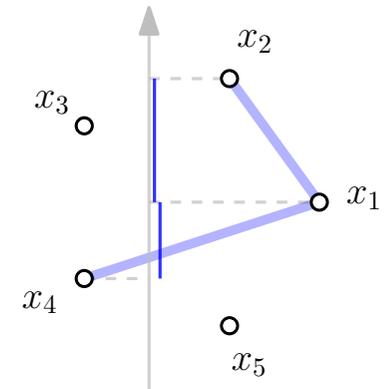
$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset$.

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$

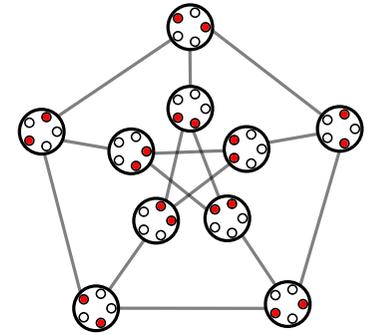
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

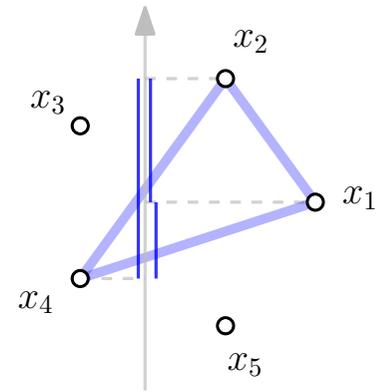
$$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset.$$

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$

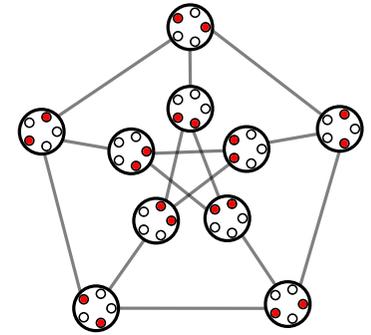
$n = 5, k = 2$

- 12, 13, 14, 15, 23
- 24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

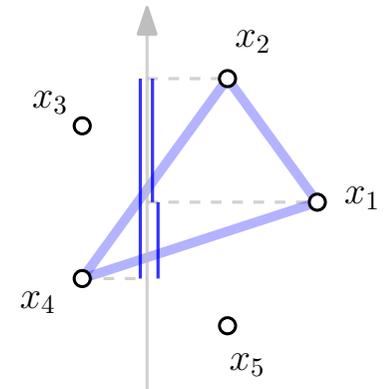
$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset$.

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$ sont des **segments** sécants 2 à 2.

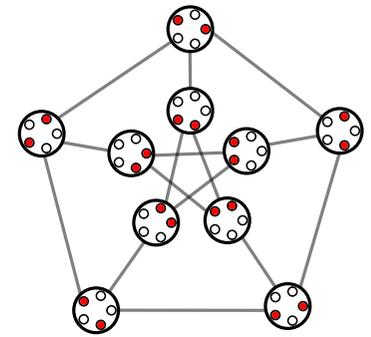
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

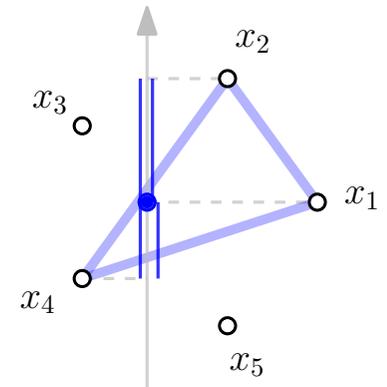
$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset$.

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$ sont des **segments** sécants 2 à 2. **Helly** ?

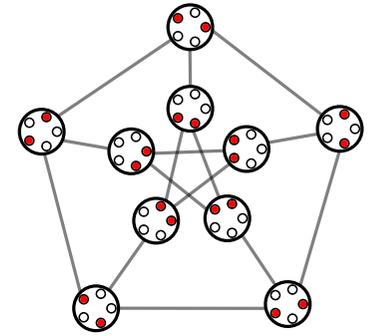
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset.$$

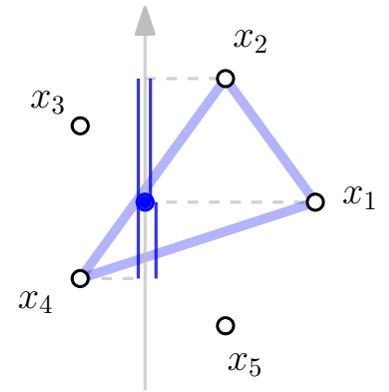
Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$ sont des **segments** sécants 2 à 2. **Helly** ?

$t_i(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{milieu du segment intersection.}$

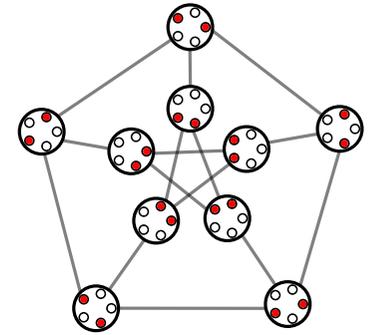
$n = 5, k = 2$

- 12, 13, 14, 15, 23
- 24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset$.

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

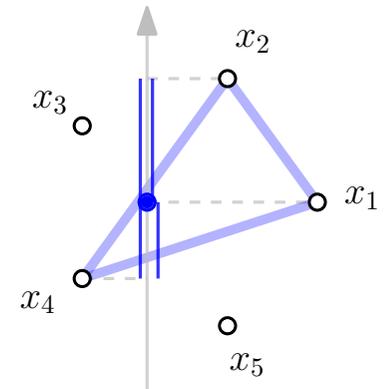
Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$ sont des **segments** sécants 2 à 2. **Helly** ?

$t_i(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{milieu du segment intersection}$.

Chaque t_i est un système d'hyperplan \Rightarrow il existe h qui coupe **tous** les $\text{conv}(X_A)$.

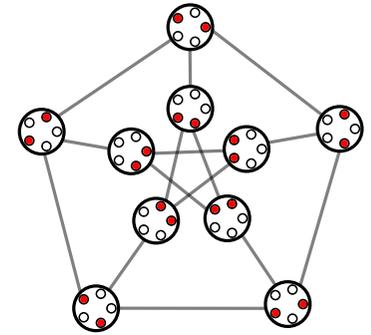
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset$.

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$ sont des **segments** sécants 2 à 2. **Helly** ?

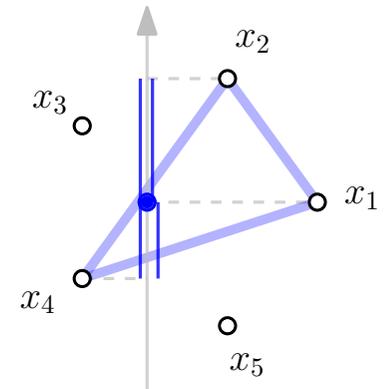
$t_i(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{milieu du segment intersection}$.

Chaque t_i est un système d'hyperplan \Rightarrow il existe h qui coupe **tous** les $\text{conv}(X_A)$.

Comptons les points : sur h , + à gauche (strict) + à droite (strict).

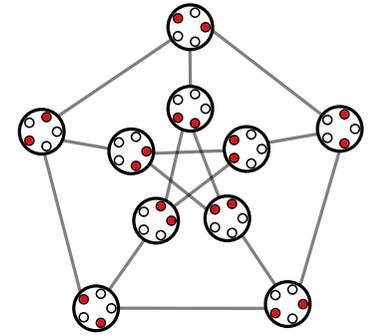
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset$.

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$ sont des **segments** sécants 2 à 2. **Helly** ?

$t_i(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{milieu du segment intersection}$.

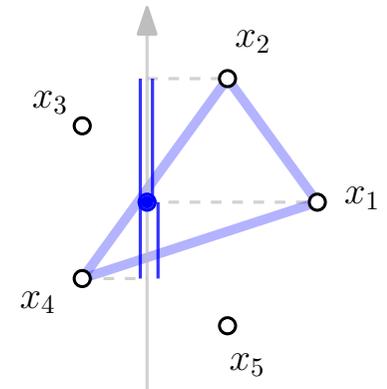
Chaque t_i est un système d'hyperplan \Rightarrow il existe h qui coupe **tous** les $\text{conv}(X_A)$.

Comptons les points : sur h , + à gauche (strict) + à droite (strict).

$$\leq d$$

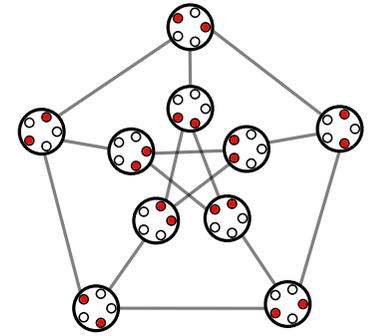
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \\ \Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset.$$

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$ sont des **segments** sécants 2 à 2. **Helly** ?

$t_i(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{milieu du segment intersection.}$

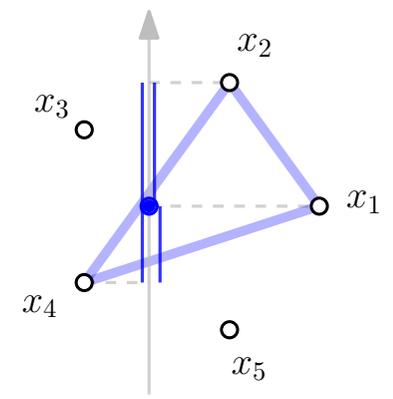
Chaque t_i est un système d'hyperplan \Rightarrow il existe h qui coupe **tous** les $\text{conv}(X_A)$.

Comptons les points : sur h , + à gauche (strict) + à droite (strict).

$$\leq d \qquad \leq k - 1$$

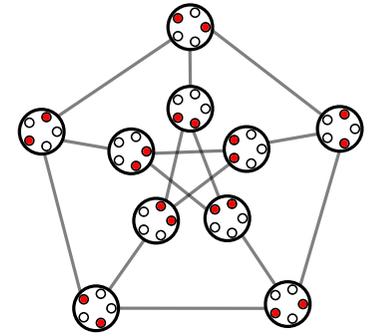
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset.$$

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$ sont des **segments** sécants 2 à 2. **Helly** ?

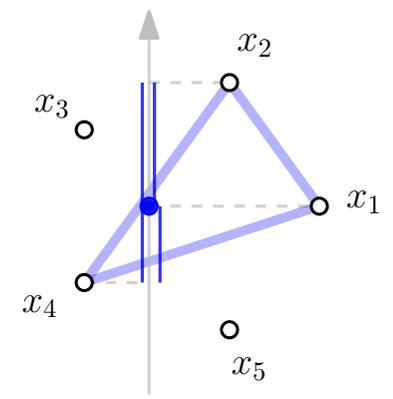
$t_i(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{milieu du segment intersection}$.

Chaque t_i est un système d'hyperplan \Rightarrow il existe h qui coupe **tous** les $\text{conv}(X_A)$.

Comptons les points : sur h , + à gauche (strict) + à droite (strict).
 $\leq d$ $\leq k - 1$ $\leq k - 1$

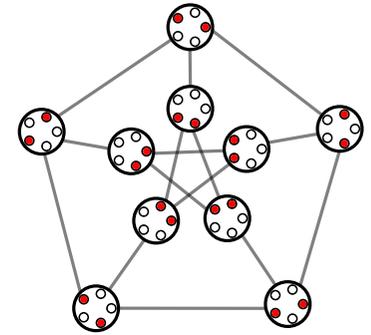
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset.$$

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$ sont des **segments** sécants 2 à 2. **Helly** ?

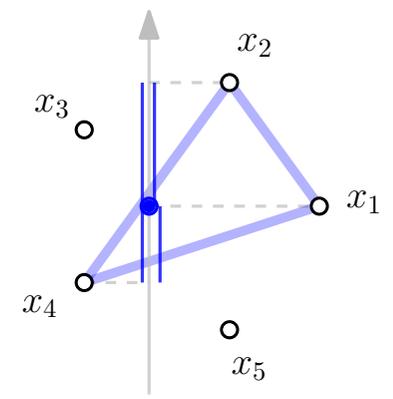
$t_i(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{milieu du segment intersection.}$

Chaque t_i est un système d'hyperplan \Rightarrow il existe h qui coupe **tous** les $\text{conv}(X_A)$.

Comptons les points : sur h , + à gauche (strict) + à droite (strict). $< n$
 $\leq d \qquad \leq k - 1 \qquad \leq k - 1$

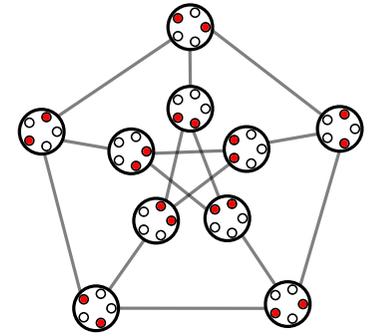
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



Preuve

Théorème. Pour tous entiers $n \geq 2k \geq 0$, dans toute coloration des éléments de $\binom{[n]}{k}$ par $n - 2k + 1$ couleurs, il existe deux éléments **disjoints** et de **même couleur**.



$d \stackrel{\text{def}}{=} n - 2k + 1$ et supposons $\exists c : \binom{[n]}{k} \rightarrow [d]$ t. q. $c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, en position générale.

Pour $A \in \binom{[n]}{k}$ on pose $X_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i : i \in A\}$.

$c(A) = c(B) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow X_A \cap X_B \neq \emptyset \Rightarrow \text{conv}(X_A) \cap \text{conv}(X_B) \neq \emptyset$.

Fixons $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$ et **projetons** \perp chaque $\text{conv}(X_A)$ sur $\mathbb{R}\vec{u}$.

Pour $i \in [d]$, les projections des $\{\text{conv}(X_A) : c(A) = i\}$ sont des **segments** sécants 2 à 2. **Helly** ?

$t_i(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{milieu du segment intersection}$.

Chaque t_i est un système d'hyperplan \Rightarrow il existe h qui coupe **tous** les $\text{conv}(X_A)$.

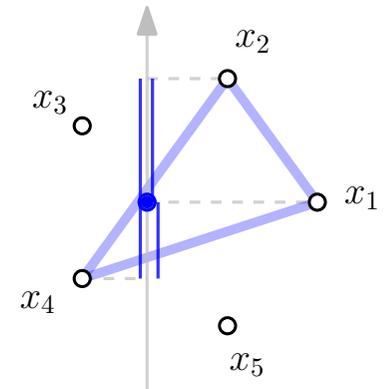
Comptons les points : sur h , + à gauche (strict) + à droite (strict). $< n$

$$\leq d \qquad \leq k - 1 \qquad \leq k - 1$$

□

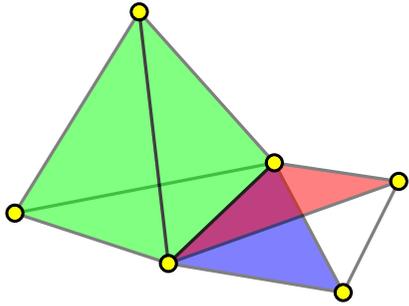
$n = 5, k = 2$

12, 13, 14, 15, 23
24, 25, 34, 35, 45



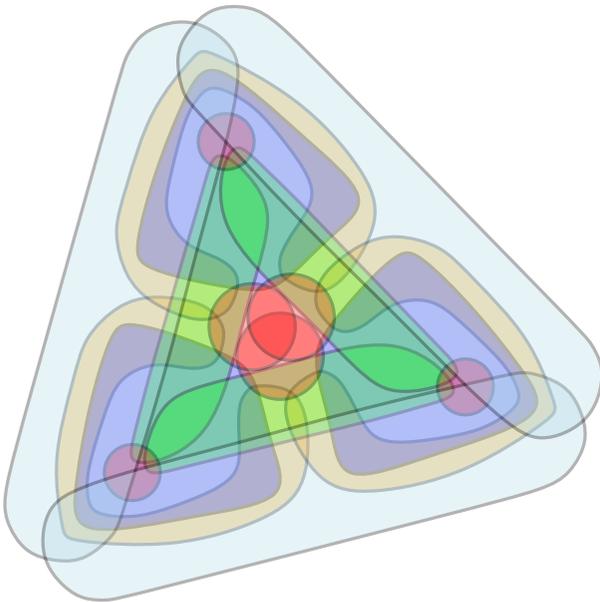
Preuve

Résumé sur les complexes simpliciaux géométriques



Généralisation en dimension ≥ 2
 du point de vue "graphe \simeq espace topologique".

Importance des plongements. \hookrightarrow , \hookrightarrow_{PL} , \hookrightarrow_L .



La convexité combinatoire s'exprime via \hookrightarrow_L
 et peut se généraliser via \hookrightarrow .

Borsuk-Ulam est fondamental et utile
 même hors de la topologie & géométrie.

5. Complexes simpliciaux abstraits

Modèle combinatoire élémentaire de l'hérédité.

Des complexes simpliciaux géométriques... sans géométrie.

Un **complexe simplicial abstrait** est une famille **finie** \mathcal{C} d'ensembles **finis** qui est **héréditaire** ^{def} : si $A \in \mathcal{C}$ et $B \subseteq A$ alors $B \in \mathcal{C}$.

Un **complexe simplicial abstrait** est une famille **finie** \mathcal{C} d'ensembles **finis** qui est **héréditaire** ^{def} : si $A \in \mathcal{C}$ et $B \subseteq A$ alors $B \in \mathcal{C}$.

Exemples : $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$

Un **complexe simplicial abstrait** est une famille **finie** \mathcal{C} d'ensembles **finis** qui est **héréditaire** ^{def} : si $A \in \mathcal{C}$ et $B \subseteq A$ alors $B \in \mathcal{C}$.

Exemples : $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$

$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\},$
 $\{2, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$

Un **complexe simplicial abstrait** est une famille **finie** \mathcal{C} d'ensembles **finis** qui est **héréditaire** ^{def} : si $A \in \mathcal{C}$ et $B \subseteq A$ alors $B \in \mathcal{C}$.

Exemples : $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$

$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$

$\mathcal{P} \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres **premiers**, k un entier.

$$\mathcal{C}_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ X \subset \mathcal{P} : \prod_{q \in X} q \leq k \right\}.$$

Un **complexe simplicial abstrait** est une famille **finie** \mathcal{C} d'ensembles **finis** qui est **héréditaire** :^{def} si $A \in \mathcal{C}$ et $B \subseteq A$ alors $B \in \mathcal{C}$.

Exemples : $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$

$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$

$\mathcal{P} \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres **premiers**, k un entier.

$$\mathcal{C}_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ X \subset \mathcal{P} : \prod_{q \in X} q \leq k \right\}.$$

\mathcal{F} une famille de sous-ensembles de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{N}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ et } \bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset \}.$$

Un **complexe simplicial abstrait** est une famille **finie** \mathcal{C} d'ensembles **finis** qui est **héréditaire** ^{def} : si $A \in \mathcal{C}$ et $B \subseteq A$ alors $B \in \mathcal{C}$.

Exemples : $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$

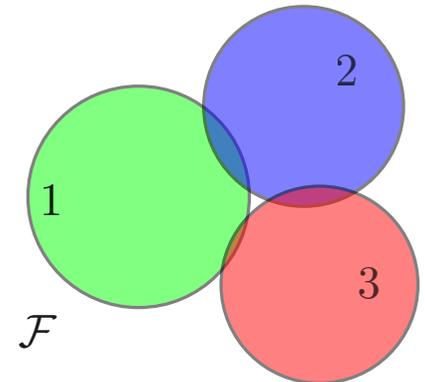
$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$

$\mathcal{P} \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres **premiers**, k un entier.

$$\mathcal{C}_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ X \subset \mathcal{P} : \prod_{q \in X} q \leq k \right\}.$$

\mathcal{F} une famille de sous-ensembles de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{N}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ et } \bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset \}.$$



Un **complexe simplicial abstrait** est une famille **finie** \mathcal{C} d'ensembles **finis** qui est **héréditaire** ^{def} : si $A \in \mathcal{C}$ et $B \subseteq A$ alors $B \in \mathcal{C}$.

Exemples : $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$

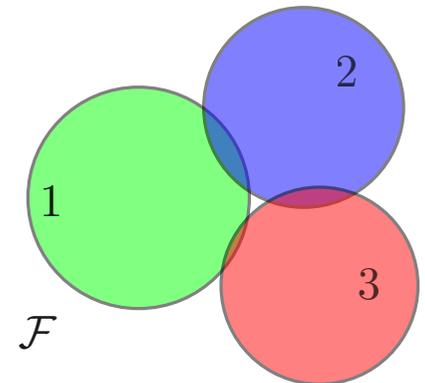
$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$

$\mathcal{P} \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres **premiers**, k un entier.

$$\mathcal{C}_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ X \subset \mathcal{P} : \prod_{q \in X} q \leq k \right\}.$$

\mathcal{F} une famille de sous-ensembles de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{N}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ et } \bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset \}.$$



$$\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}$$

Un **complexe simplicial abstrait** est une famille **finie** \mathcal{C} d'ensembles **finis** qui est **héréditaire** ^{def} : si $A \in \mathcal{C}$ et $B \subseteq A$ alors $B \in \mathcal{C}$.

Exemples : $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$

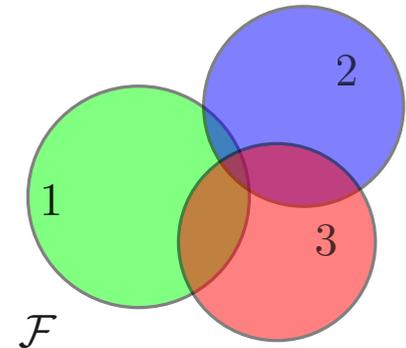
$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$

$\mathcal{P} \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres **premiers**, k un entier.

$$\mathcal{C}_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ X \subset \mathcal{P} : \prod_{q \in X} q \leq k \right\}.$$

\mathcal{F} une famille de sous-ensembles de \mathbb{R}^d .

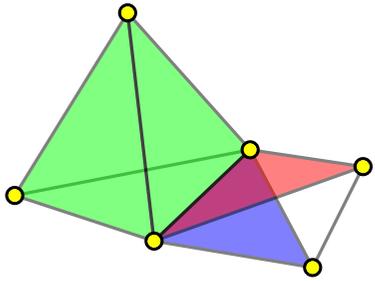
$$\mathcal{N}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ et } \bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset \}.$$



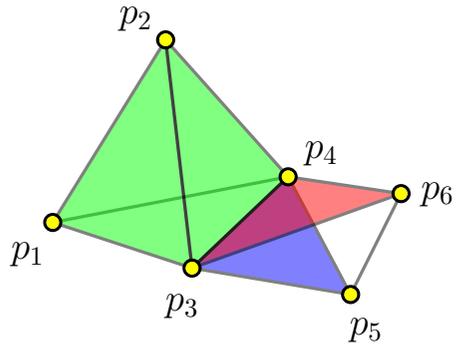
$$\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

Tout complexe simplicial géométrique a un complexe simplicial abstrait associé.

Tout complexe simplicial géométrique a un complexe simplicial abstrait associé.

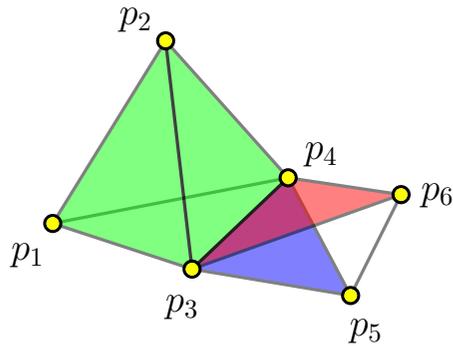


Tout complexe simplicial géométrique a un complexe simplicial abstrait associé.



$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \emptyset\}$$

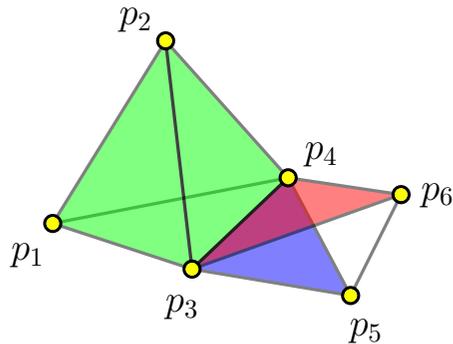
Tout complexe simplicial géométrique a un complexe simplicial abstrait associé.



$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \emptyset\}$$

$$V(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{sommets de } \sigma\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \{V(\sigma) : \sigma \in \mathcal{K}\}.$$

Tout complexe simplicial géométrique a un complexe simplicial abstrait associé.

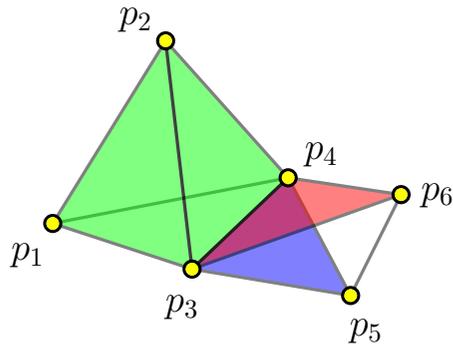


$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \emptyset\}$$

$$V(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{sommets de } \sigma\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \{V(\sigma) : \sigma \in \mathcal{K}\}.$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K}} = \{\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_3, p_4, p_5\}, \{p_3, p_4, p_6\}, \{p_5, p_6\}, \{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_3, p_4\}, \{p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2\}, \{p_1, p_3\}, \{p_1, p_4\}, \{p_2, p_3\}, \{p_2, p_4\}, \{p_3, p_4\}, \{p_3, p_5\}, \{p_4, p_5\}, \{p_3, p_6\}, \{p_4, p_6\}, \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, \{p_4\}, \{p_5\}, \{p_6\}, \emptyset\}$$

Tout complexe simplicial géométrique a un complexe simplicial abstrait associé.



$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \emptyset\}$$

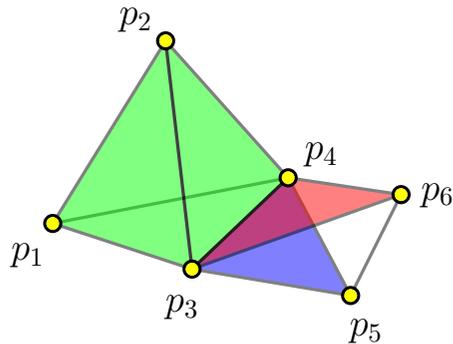
$$V(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{sommets de } \sigma\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \{V(\sigma) : \sigma \in \mathcal{K}\}.$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K}} = \{\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_3, p_4, p_5\}, \{p_3, p_4, p_6\}, \{p_5, p_6\}, \{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_3, p_4\}, \{p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2\}, \{p_1, p_3\}, \{p_1, p_4\}, \{p_2, p_3\}, \{p_2, p_4\}, \{p_3, p_4\}, \{p_3, p_5\}, \{p_4, p_5\}, \{p_3, p_6\}, \{p_4, p_6\}, \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, \{p_4\}, \{p_5\}, \{p_6\}, \emptyset\}$$

$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ est un complexe simplicial abstrait.

\mathcal{K} est clos par "prendre une face" $\Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ est clos par "prendre un sous-ensemble".

Tout complexe simplicial géométrique a un complexe simplicial abstrait associé.



$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \emptyset\}$$

$$V(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{sommets de } \sigma\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \{V(\sigma) : \sigma \in \mathcal{K}\}.$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K}} = \{\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_3, p_4, p_5\}, \{p_3, p_4, p_6\}, \{p_5, p_6\}, \{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_3, p_4\}, \{p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2\}, \{p_1, p_3\}, \{p_1, p_4\}, \{p_2, p_3\}, \{p_2, p_4\}, \{p_3, p_4\}, \{p_3, p_5\}, \{p_4, p_5\}, \{p_3, p_6\}, \{p_4, p_6\}, \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, \{p_4\}, \{p_5\}, \{p_6\}, \emptyset\}$$

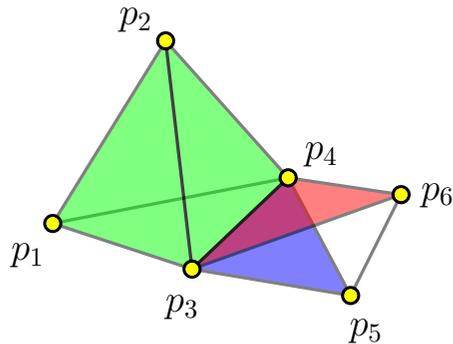
$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ est un complexe simplicial abstrait.

\mathcal{K} est clos par "prendre une face" $\Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ est clos par "prendre un sous-ensemble".

\mathcal{K} est une **réalisation géométrique** de \mathcal{C} si $\mathcal{C}_{\mathcal{K}} \simeq \mathcal{C}$.

↑
 \exists bijection $\mathcal{C}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{C}$ qui commute avec \subset

Tout complexe simplicial géométrique a un complexe simplicial abstrait associé.



$$\mathcal{K} = \{p_1p_2p_3p_4, p_3p_4p_5, p_3p_4p_6, p_5p_6, p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_3p_4, p_2p_3p_4, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5, p_3p_6, p_4p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \emptyset\}$$

$$V(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{sommets de } \sigma\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \{V(\sigma) : \sigma \in \mathcal{K}\}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \simeq & \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ & \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ & \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\} \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ est un complexe simplicial abstrait.

\mathcal{K} est clos par "prendre une face" $\Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ est clos par "prendre un sous-ensemble".

\mathcal{K} est une réalisation géométrique de \mathcal{C} si $\mathcal{C}_{\mathcal{K}} \simeq \mathcal{C}$.

↑
 \exists bijection $\mathcal{C}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{C}$ qui commute avec \subset

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

Preuve

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$$

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

Preuve

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$$

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

ici $a_i = \{i\}$ par exemple.

Preuve

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$$

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

ici $a_i = \{i\}$ par exemple. Chaque élément de \mathcal{C} est un sous ensemble de $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$

Preuve

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$$

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

ici $a_i = \{i\}$ par exemple. Chaque élément de \mathcal{C} est un sous ensemble de $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$

on définit $e_i \stackrel{\text{def}}{=} i$ ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n ,

Preuve

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$$

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

ici $a_i = \{i\}$ par exemple. Chaque élément de \mathcal{C} est un sous ensemble de $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$

on définit $e_i \stackrel{\text{def}}{=} i$ ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n ,

on définit $P_A \stackrel{\text{def}}{=} \{e_i : a_i \subset A\}$ pour $A \in \mathcal{C}$,

Preuve

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$$

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

ici $a_i = \{i\}$ par exemple. Chaque élément de \mathcal{C} est un sous ensemble de $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$

on définit $e_i \stackrel{\text{def}}{=} i$ ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n ,

on définit $P_A \stackrel{\text{def}}{=} \{e_i : a_i \subset A\}$ pour $A \in \mathcal{C}$,

$$P_{\{3,4,5\}} = \{e_3, e_4, e_5\}$$

Preuve

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$$

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

ici $a_i = \{i\}$ par exemple. Chaque élément de \mathcal{C} est un sous ensemble de $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$

on définit $e_i \stackrel{\text{def}}{=} i$ ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n ,

on définit $P_A \stackrel{\text{def}}{=} \{e_i : a_i \subset A\}$ pour $A \in \mathcal{C}$,

$$P_{\{3,4,5\}} = \{e_3, e_4, e_5\}$$

et on pose $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P_A) : A \in \mathcal{C}\}$.

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$$

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

ici $a_i = \{i\}$ par exemple. Chaque élément de \mathcal{C} est un sous ensemble de $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$

on définit $e_i \stackrel{\text{def}}{=} i$ ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n ,

on définit $P_A \stackrel{\text{def}}{=} \{e_i : a_i \subset A\}$ pour $A \in \mathcal{C}$,

$$P_{\{3,4,5\}} = \{e_3, e_4, e_5\}$$

et on pose $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P_A) : A \in \mathcal{C}\}$. C'est un complexe simplicial géométrique.

Preuve

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$$

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

ici $a_i = \{i\}$ par exemple. Chaque élément de \mathcal{C} est un sous ensemble de $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$

on définit $e_i \stackrel{\text{def}}{=} i$ ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n ,

on définit $P_A \stackrel{\text{def}}{=} \{e_i : a_i \subset A\}$ pour $A \in \mathcal{C}$,

$$P_{\{3,4,5\}} = \{e_3, e_4, e_5\}$$

et on pose $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P_A) : A \in \mathcal{C}\}$. C'est un complexe simplicial géométrique.

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K}} = \{P_A : A \in \mathcal{C}\}$$

Preuve

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$$

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

ici $a_i = \{i\}$ par exemple. Chaque élément de \mathcal{C} est un sous ensemble de $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$

on définit $e_i \stackrel{\text{def}}{=} i$ ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n ,

on définit $P_A \stackrel{\text{def}}{=} \{e_i : a_i \subset A\}$ pour $A \in \mathcal{C}$,

$$P_{\{3,4,5\}} = \{e_3, e_4, e_5\}$$

et on pose $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P_A) : A \in \mathcal{C}\}$. C'est un complexe simplicial géométrique.

$\mathcal{C}_{\mathcal{K}} = \{P_A : A \in \mathcal{C}\} \simeq \mathcal{C}$ par la bijection $e_i \mapsto$ l'élément de a_i .

Preuve

Proposition. Tout complexe simplicial abstrait a une réalisation géométrique.

Étant donné un complexe simplicial abstrait \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$$

on note a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de \mathcal{C} de cardinal 1,

ici $a_i = \{i\}$ par exemple. Chaque élément de \mathcal{C} est un sous ensemble de $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$

on définit $e_i \stackrel{\text{def}}{=} i$ ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n ,

on définit $P_A \stackrel{\text{def}}{=} \{e_i : a_i \subset A\}$ pour $A \in \mathcal{C}$,

$$P_{\{3,4,5\}} = \{e_3, e_4, e_5\}$$

et on pose $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{conv}(P_A) : A \in \mathcal{C}\}$. C'est un complexe simplicial géométrique.

$\mathcal{C}_{\mathcal{K}} = \{P_A : A \in \mathcal{C}\} \simeq \mathcal{C}$ par la bijection $e_i \mapsto$ l'élément de a_i . \square

Preuve

La **structure** d'un complexe simplicial géométrique est résumée dans le complexe simplicial abstrait associé.

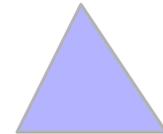
La **structure** d'un complexe simplicial géométrique est résumée dans le complexe simplicial abstrait associé.

Tout complexe simplicial abstrait a un **espace topologique** associé, celui de n'importe laquelle de ses réalisations.

La **structure** d'un complexe simplicial géométrique est résumée dans le complexe simplicial abstrait associé.

Tout complexe simplicial abstrait a un **espace topologique** associé, celui de n'importe laquelle de ses réalisations.

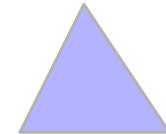
$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$



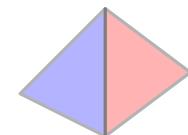
La **structure** d'un complexe simplicial géométrique est résumée dans le complexe simplicial abstrait associé.

Tout complexe simplicial abstrait a un **espace topologique** associé, celui de n'importe laquelle de ses réalisations.

$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$



$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$



6. Quels f -vecteurs sont possibles pour un complexe simplicial abstrait ?

Le théorème de **Kruskal-Katona**.

\mathcal{C} un complexe simplicial abstrait contenu dans $2^{[n]}$.

$f_i(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ éléments de \mathcal{C} de cardinal $i+1$.

\mathcal{C} un complexe simplicial abstrait contenu dans $2^{[n]}$.

$f_i(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ éléments de \mathcal{C} de cardinal $i+1$.

$= \#$ simplexes de dimension i d'une réalisation géométrique de \mathcal{C} .

\mathcal{C} un complexe simplicial abstrait contenu dans $2^{[n]}$.

$f_i(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ éléments de \mathcal{C} de cardinal $i+1$.

$= \#$ simplexes de dimension i d'une réalisation géométrique de \mathcal{C} .

$f(\mathcal{C}) = (f_0(\mathcal{C}), f_1(\mathcal{C}), \dots)$ est le f -vecteur de \mathcal{C} .

\mathcal{C} un complexe simplicial abstrait contenu dans $2^{[n]}$.

$f_i(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ éléments de \mathcal{C} de cardinal $i+1$.

$= \#$ simplexes de dimension i d'une réalisation géométrique de \mathcal{C} .

$f(\mathcal{C}) = (f_0(\mathcal{C}), f_1(\mathcal{C}), \dots)$ est le f -vecteur de \mathcal{C} .

Kruskal-Katona. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, f_k(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k+1} \Rightarrow f_{k-1}(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k}$.

$\binom{x}{i}$ est le polynôme $x \mapsto \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)}{i!}$.

\mathcal{C} un complexe simplicial abstrait contenu dans $2^{[n]}$.

$f_i(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ éléments de \mathcal{C} de cardinal $i+1$.

= $\#$ simplexes de dimension i d'une réalisation géométrique de \mathcal{C} .

$f(\mathcal{C}) = (f_0(\mathcal{C}), f_1(\mathcal{C}), \dots)$ est le f -vecteur de \mathcal{C} .

Kruskal-Katona. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, f_k(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k+1} \Rightarrow f_{k-1}(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k}$.

$\binom{x}{i}$ est le polynôme $x \mapsto \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)}{i!}$.

Examiner l'ombre ∂X d'un ensemble X d'ensembles de taille $k+1$.

$\partial X \stackrel{\text{def}}{=} \{A : |A| = k \text{ et } \exists B \in X, A \subset B\}$.

Idée

\mathcal{C} un complexe simplicial abstrait contenu dans $2^{[n]}$.

$f_i(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ éléments de \mathcal{C} de cardinal $i+1$.

= $\#$ simplexes de dimension i d'une réalisation géométrique de \mathcal{C} .

$f(\mathcal{C}) = (f_0(\mathcal{C}), f_1(\mathcal{C}), \dots)$ est le f -vecteur de \mathcal{C} .

Kruskal-Katona. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, f_k(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k+1} \Rightarrow f_{k-1}(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k}$.

$\binom{x}{i}$ est le polynôme $x \mapsto \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)}{i!}$.

Examiner l'ombre ∂X d'un ensemble X d'ensembles de taille $k+1$.

$\partial X \stackrel{\text{def}}{=} \{A : |A| = k \text{ et } \exists B \in X, A \subset B\}$.

"Normaliser" X par des "shifts" successifs qui "respectent" ∂X .

Idée

\mathcal{C} un complexe simplicial abstrait contenu dans $2^{[n]}$.

$f_i(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ éléments de \mathcal{C} de cardinal $i+1$.

= $\#$ simplexes de dimension i d'une réalisation géométrique de \mathcal{C} .

$f(\mathcal{C}) = (f_0(\mathcal{C}), f_1(\mathcal{C}), \dots)$ est le f -vecteur de \mathcal{C} .

Kruskal-Katona. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, f_k(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k+1} \Rightarrow f_{k-1}(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k}$.

$\binom{x}{i}$ est le polynôme $x \mapsto \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)}{i!}$.

Idée

Examiner l'ombre ∂X d'un ensemble X d'ensembles de taille $k+1$.

$\partial X \stackrel{\text{def}}{=} \{A : |A| = k \text{ et } \exists B \in X, A \subset B\}$.

"Normaliser" X par des "shifts" successifs qui "respectent" ∂X .

Le i -shift tente remplacer $A \in X$ par $A \setminus \{i\} \cup \{1\}$ si

$i \in A, 1 \notin A, A \setminus \{i\} \cup \{1\} \notin X$.

\mathcal{C} un complexe simplicial abstrait contenu dans $2^{[n]}$.

$f_i(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ éléments de \mathcal{C} de cardinal $i+1$.

= $\#$ simplexes de dimension i d'une réalisation géométrique de \mathcal{C} .

$f(\mathcal{C}) = (f_0(\mathcal{C}), f_1(\mathcal{C}), \dots)$ est le f -vecteur de \mathcal{C} .

Kruskal-Katona. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, f_k(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k+1} \Rightarrow f_{k-1}(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k}$.

$\binom{x}{i}$ est le polynôme $x \mapsto \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)}{i!}$.

Idée

Examiner l'ombre ∂X d'un ensemble X d'ensembles de taille $k+1$.

$\partial X \stackrel{\text{def}}{=} \{A : |A| = k \text{ et } \exists B \in X, A \subset B\}$.

"Normaliser" X par des "shifts" successifs qui "respectent" ∂X .

Le i -shift tente remplacer $A \in X$ par $A \setminus \{i\} \cup \{1\}$ si

$i \in A, 1 \notin A, A \setminus \{i\} \cup \{1\} \notin X$.

La normalisation aboutit à un ensemble X^* structuré, simple à analyser.

\mathcal{C} un complexe simplicial abstrait contenu dans $2^{[n]}$.

$f_i(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \#$ éléments de \mathcal{C} de cardinal $i+1$.

= $\#$ simplexes de dimension i d'une réalisation géométrique de \mathcal{C} .

$f(\mathcal{C}) = (f_0(\mathcal{C}), f_1(\mathcal{C}), \dots)$ est le f -vecteur de \mathcal{C} .

Kruskal-Katona. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, f_k(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k+1} \Rightarrow f_{k-1}(\mathcal{C}) \geq \binom{x}{k}$.

$\binom{x}{i}$ est le polynôme $x \mapsto \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)}{i!}$.

Idée

Examiner l'ombre ∂X d'un ensemble X d'ensembles de taille $k+1$.

$\partial X \stackrel{\text{def}}{=} \{A : |A| = k \text{ et } \exists B \in X, A \subset B\}$.

"Normaliser" X par des "shifts" successifs qui "respectent" ∂X .

Le i -shift tente remplace $A \in X$ par $A \setminus \{i\} \cup \{1\}$ si

$i \in A, 1 \notin A, A \setminus \{i\} \cup \{1\} \notin X$.

La normalisation aboutit à un ensemble X^* structuré, simple à analyser.

Kruskal-Katona caractérise les f -vecteurs de complexes simpliciaux.

7. Quels f -vecteurs sont possibles pour un nerf de convexes de \mathbb{R}^d ?

Le théorème de **la borne supérieure**.

$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \\ \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 .

$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \\ \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

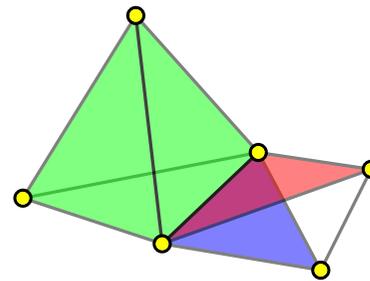
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

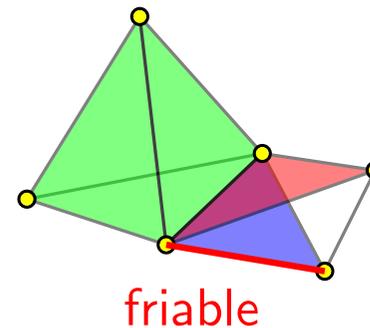
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

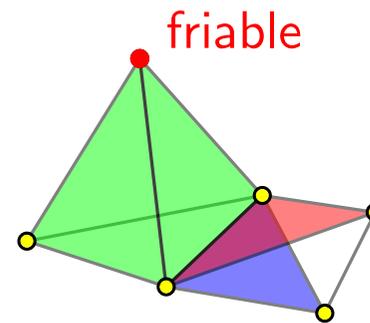
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

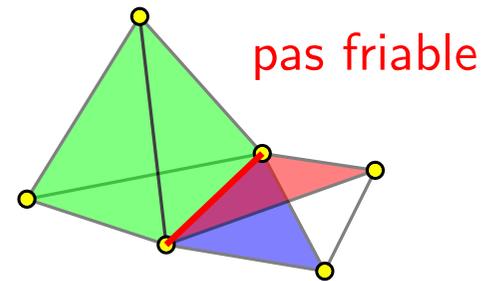
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

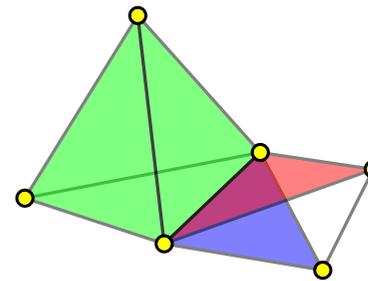
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

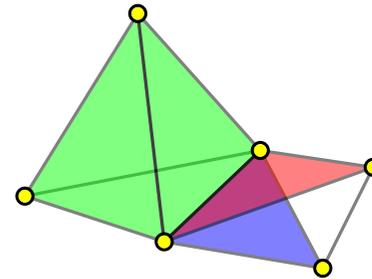
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$

$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

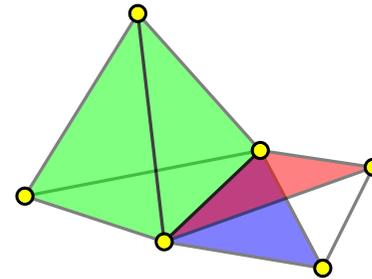
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

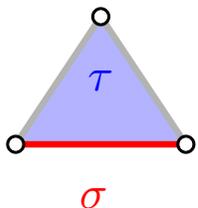
(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

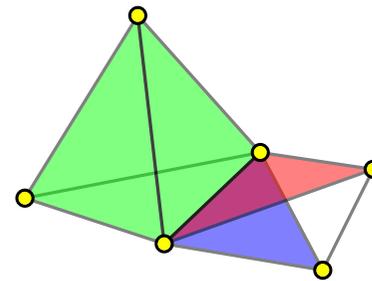
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

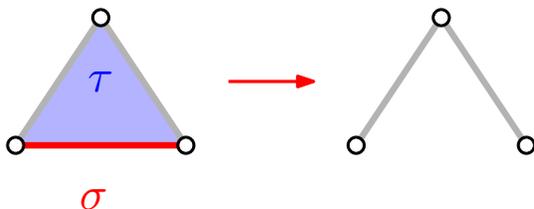
(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

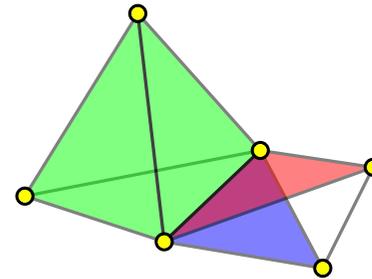
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

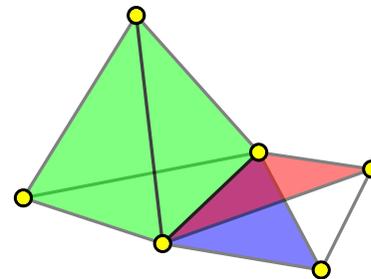
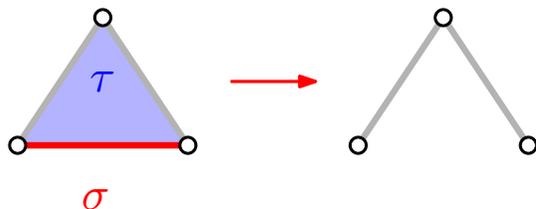
(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

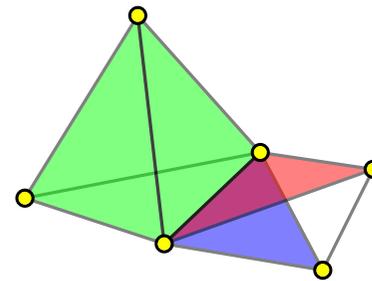
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

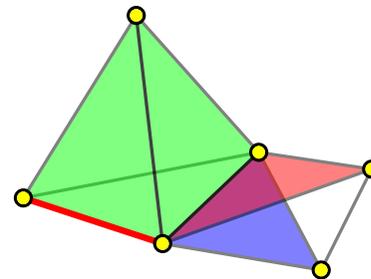
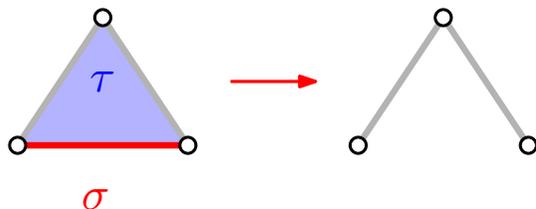
(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

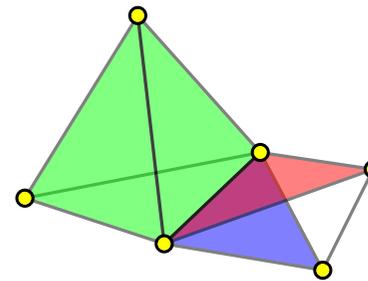
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

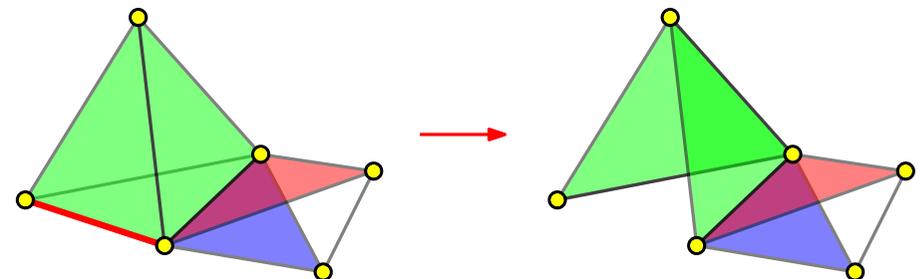
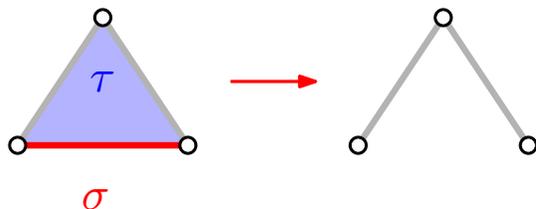
(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

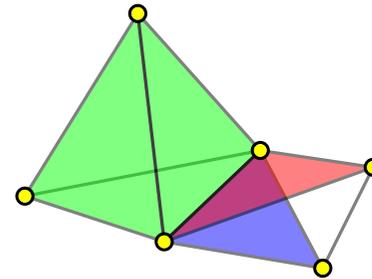
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

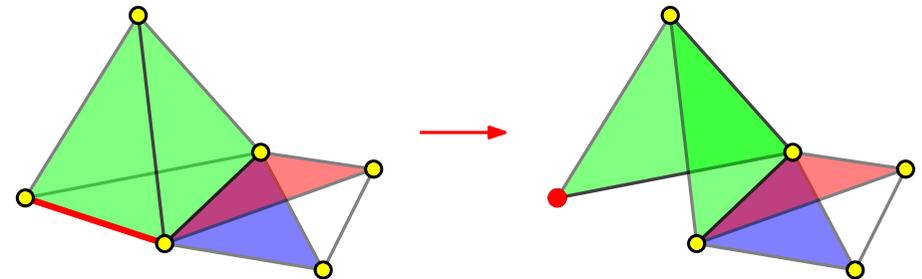
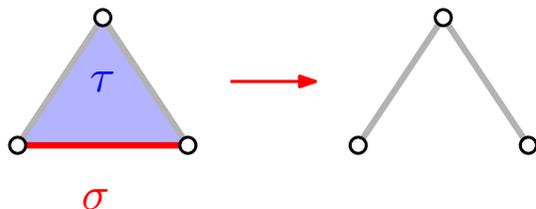
(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

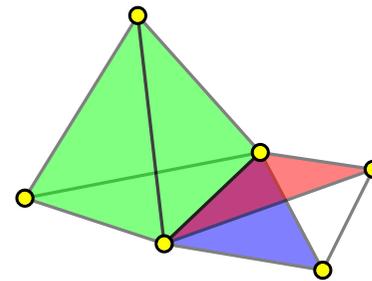
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

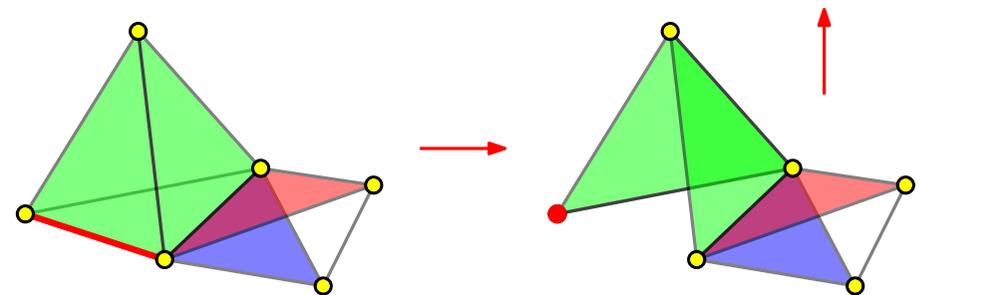
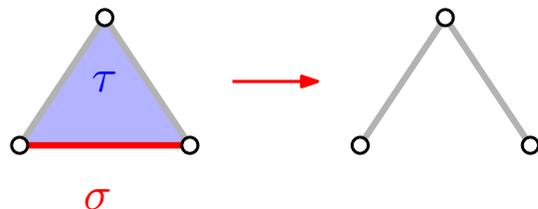
(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

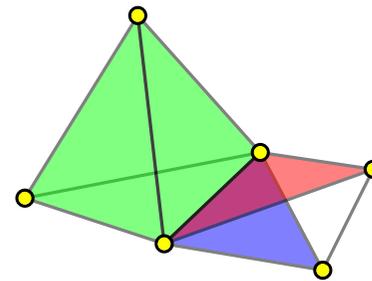
$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

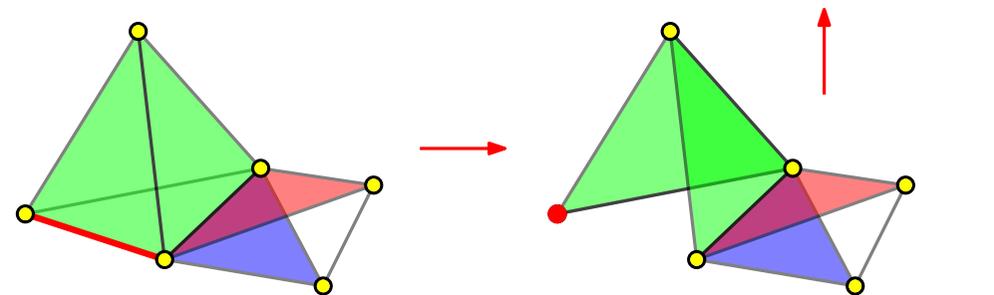
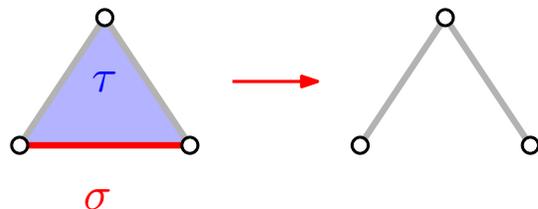
(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .



Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

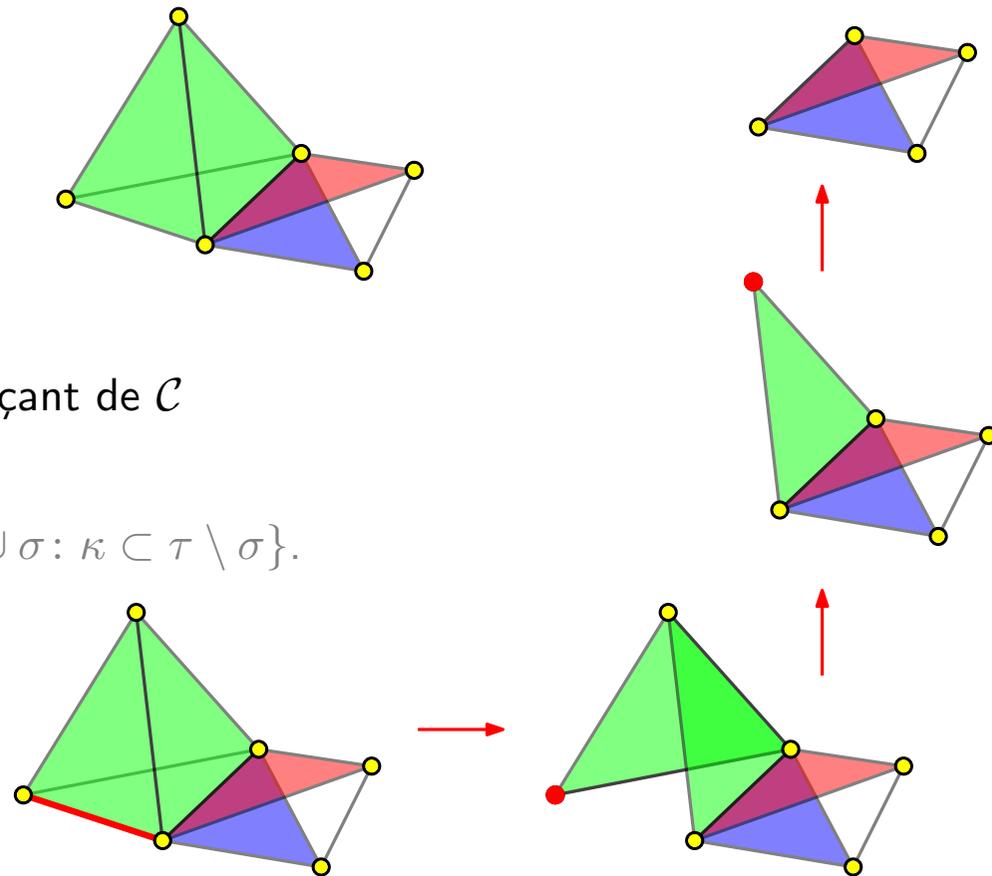
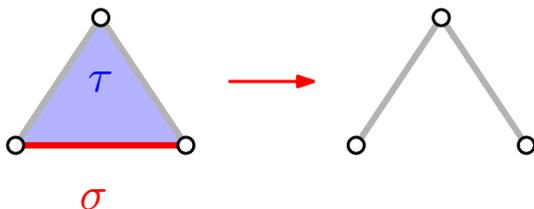
$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .

Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

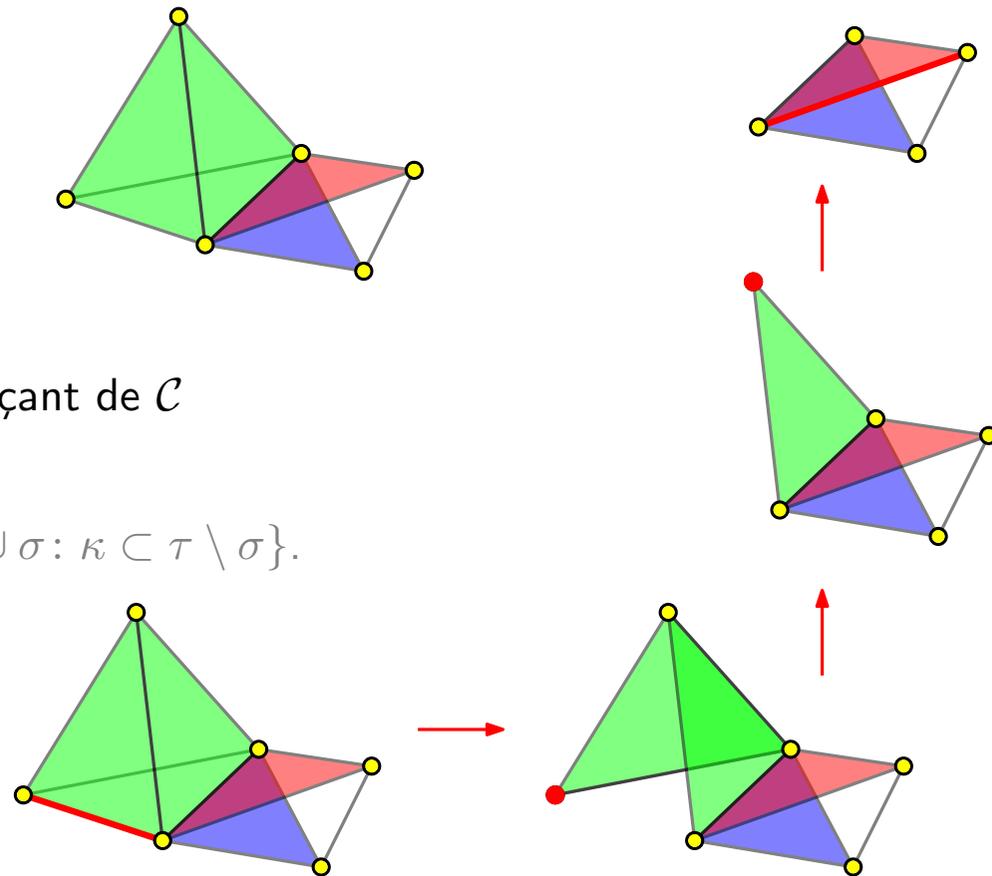
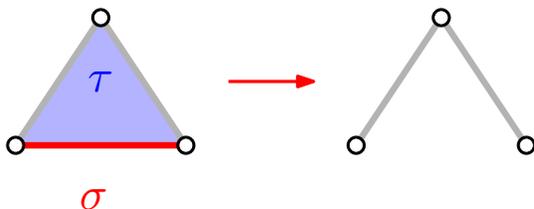
$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .

Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

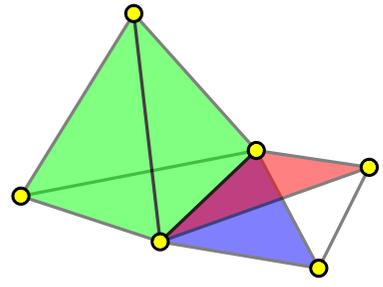
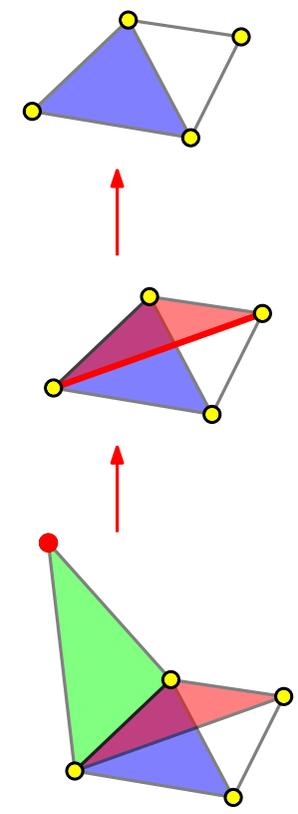
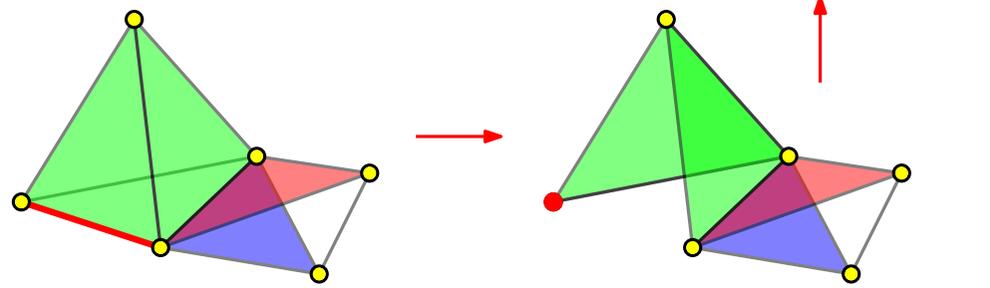
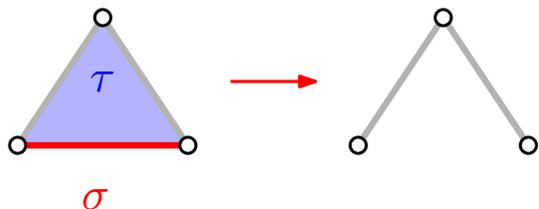
$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .

Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

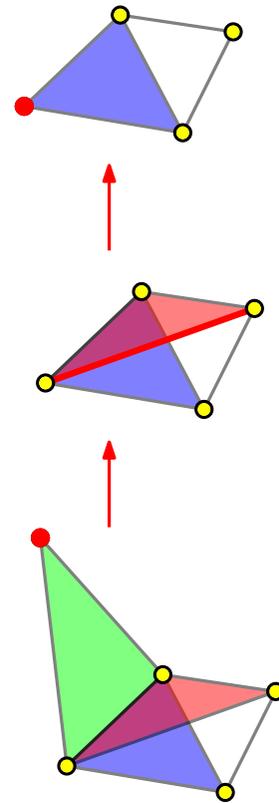
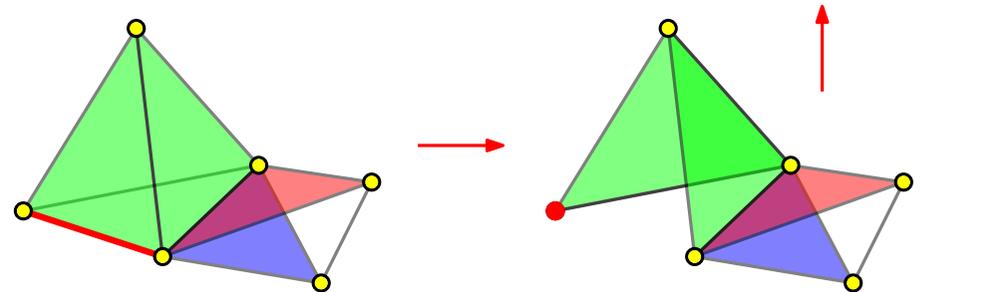
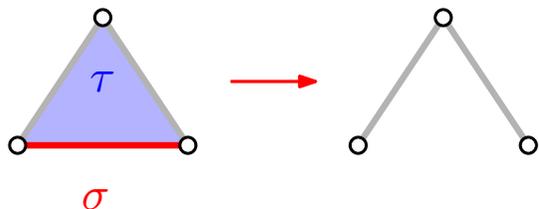
$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .

Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$



$\forall d$, il existe des complexes simpliciaux qui ne peuvent pas s'obtenir comme nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$$

n'est pas le nerf de convexes de \mathbb{R}^2 . **Helly** forcerait $\{1, 2, 3, 4\}$ à y être.

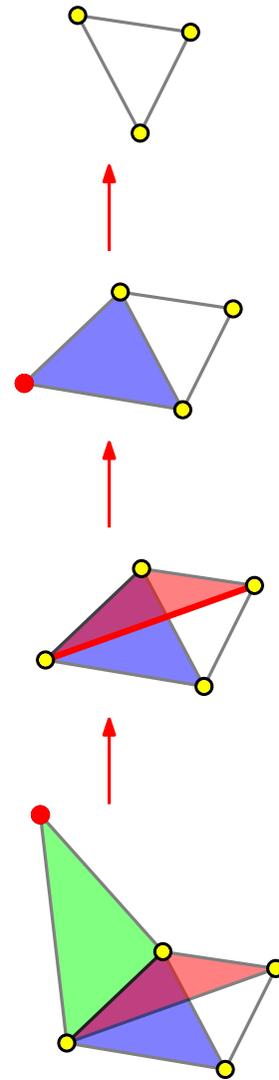
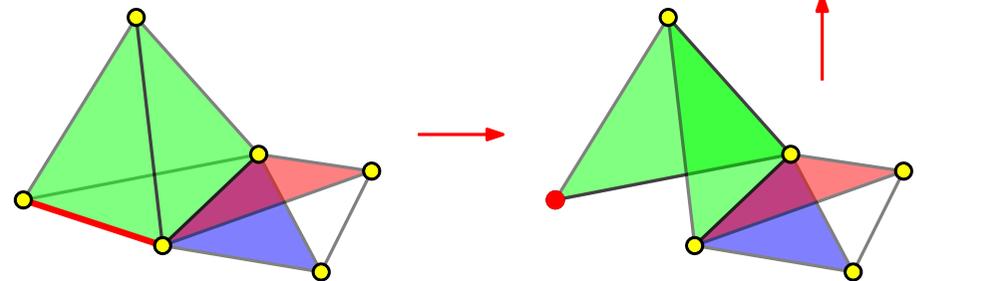
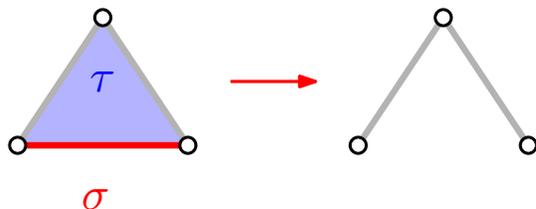
$\sigma \in \mathcal{C}$ est **friable** s'il existe un **unique** $\tau \in \mathcal{C}$ t. q.

(i) $\sigma \subsetneq \tau$

(ii) τ est maximale pour \subseteq dans \mathcal{C} .

Un **effritement** de \mathcal{C} est un complexe obtenu en effaçant de \mathcal{C} tout ensemble contenant σ , pour σ friable.

$$= \text{enlever } [\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \sigma \subseteq v \subseteq \tau\} = \{\kappa \cup \sigma : \kappa \subset \tau \setminus \sigma\}.$$

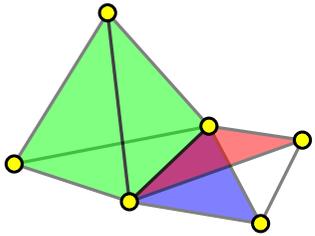


Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (i) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.

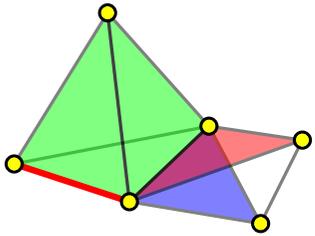
Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



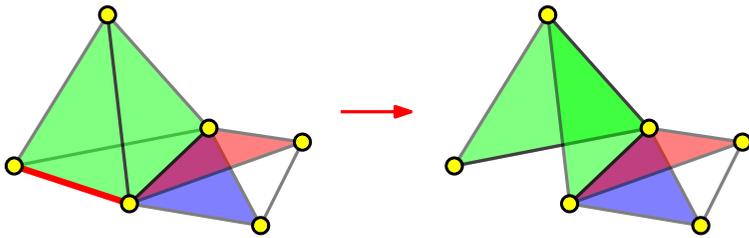
Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



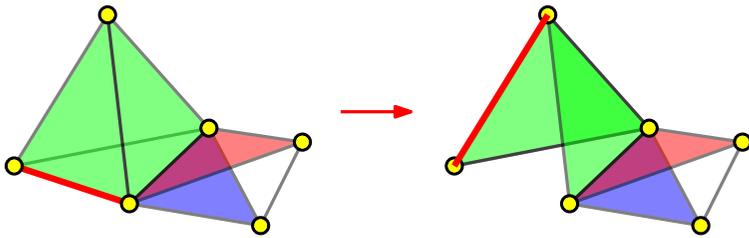
Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



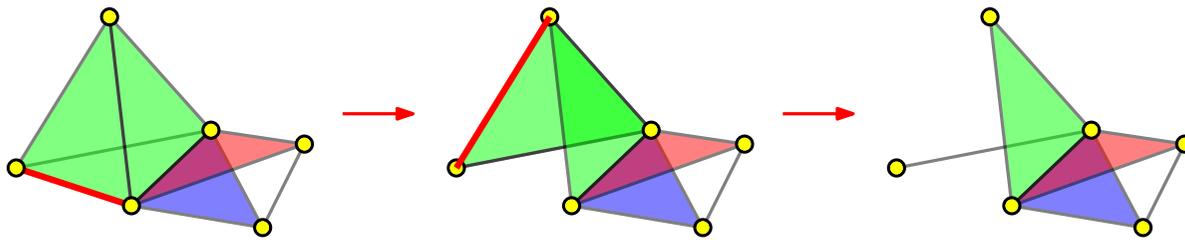
Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



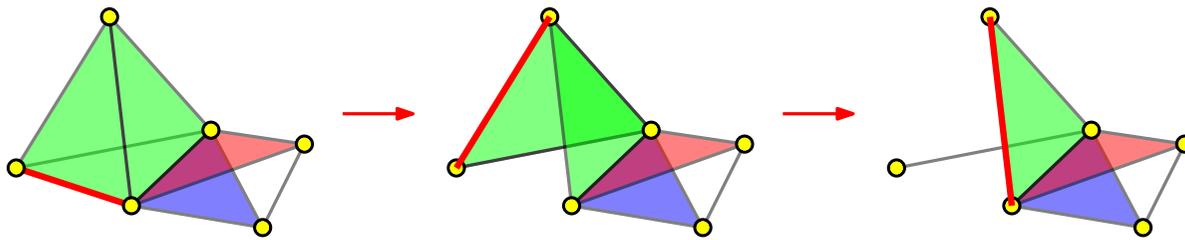
Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



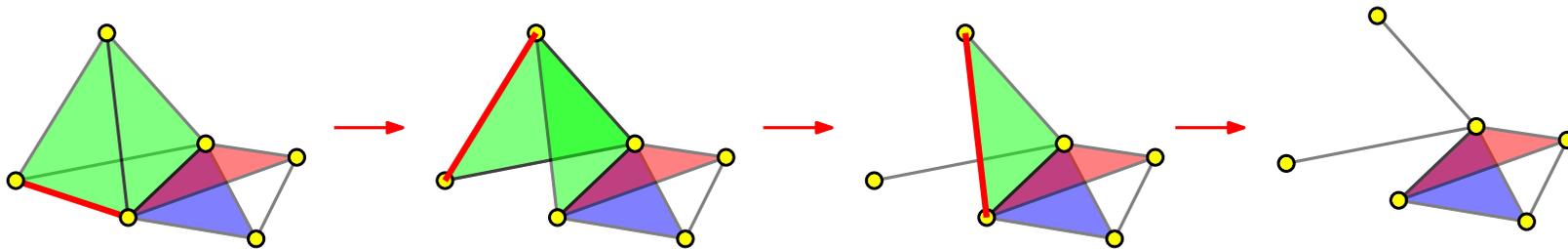
Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



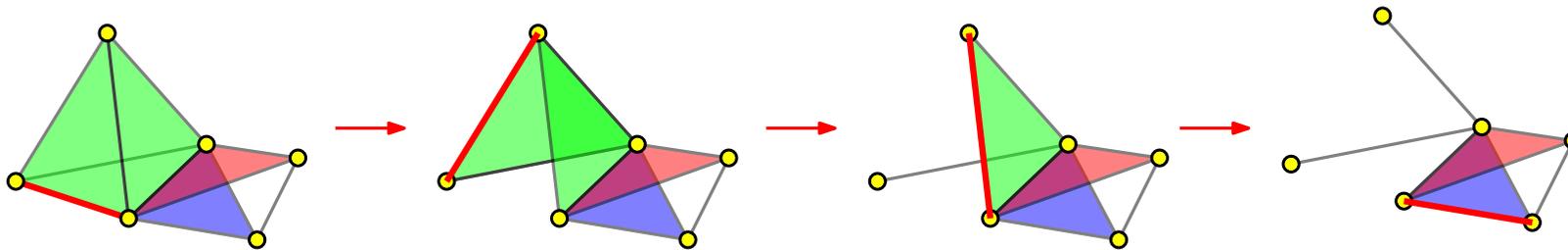
Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



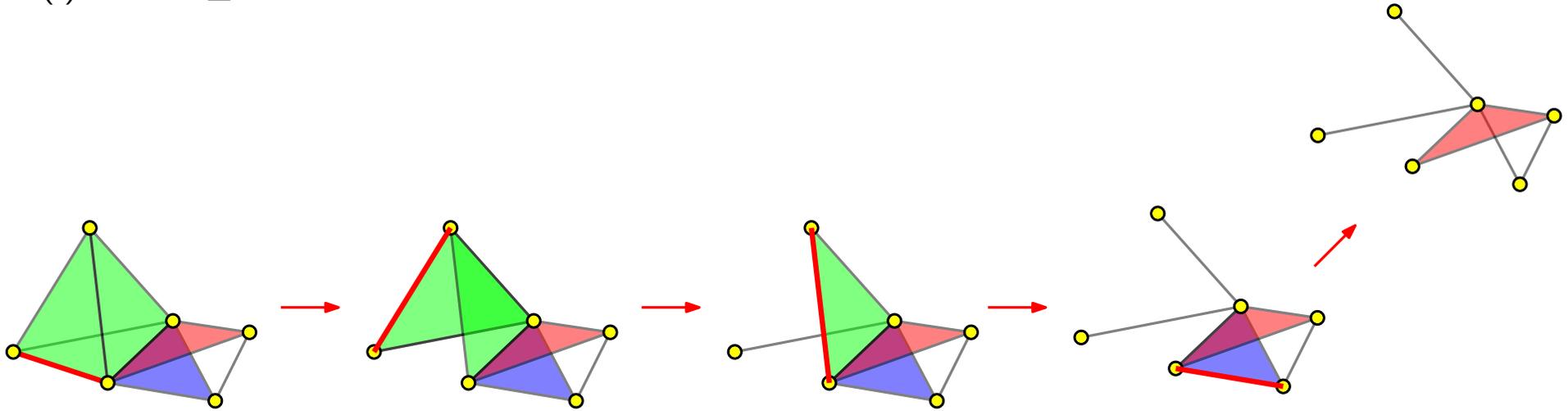
Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



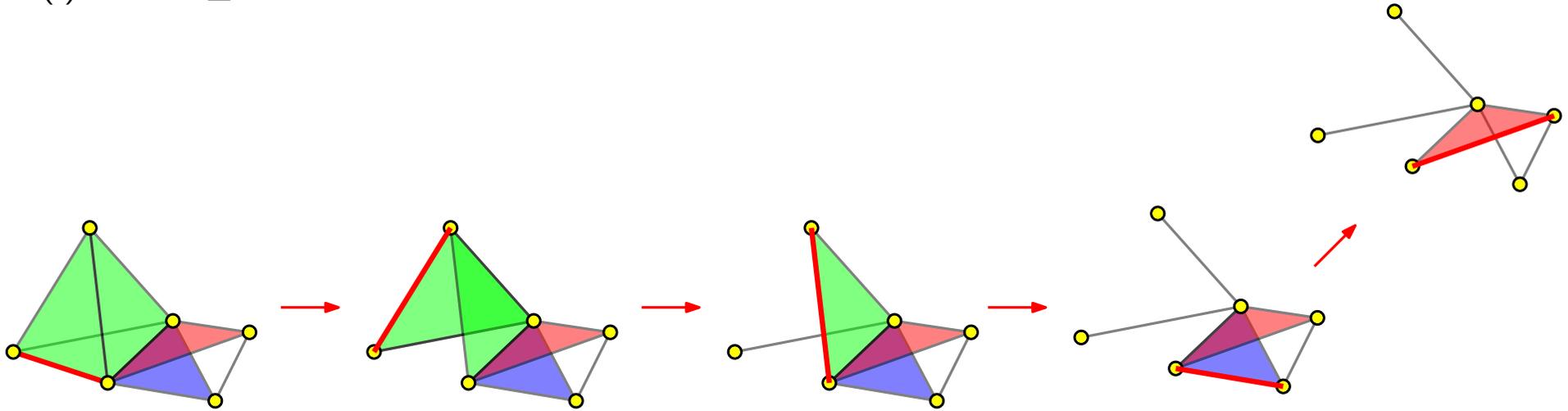
Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



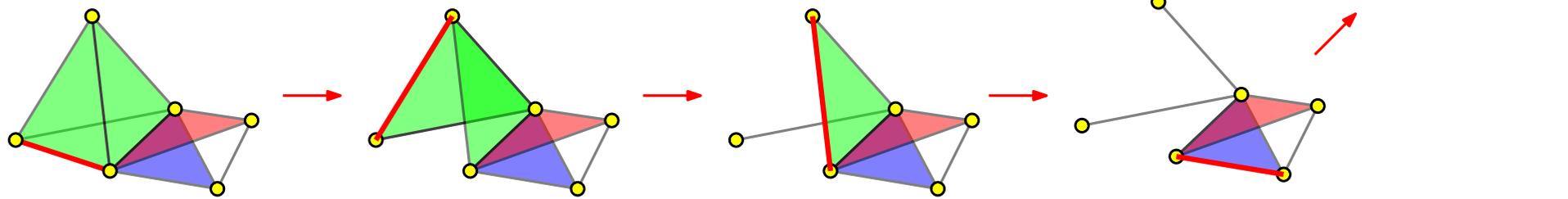
Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



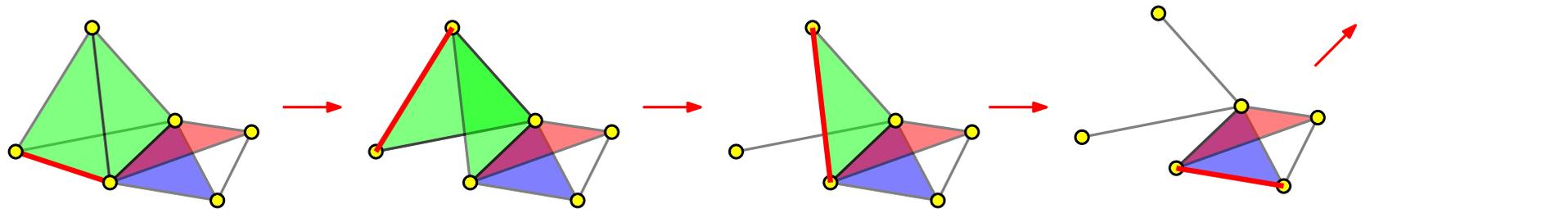
Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

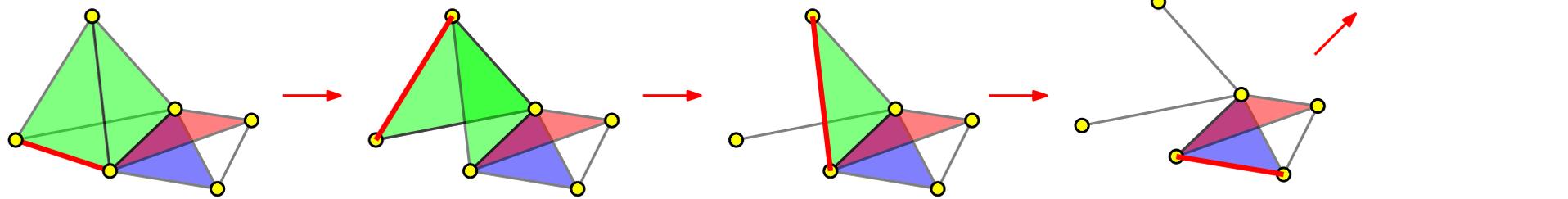
- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



Wegner. Pour toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d , $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ admet un d -effritement.

Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



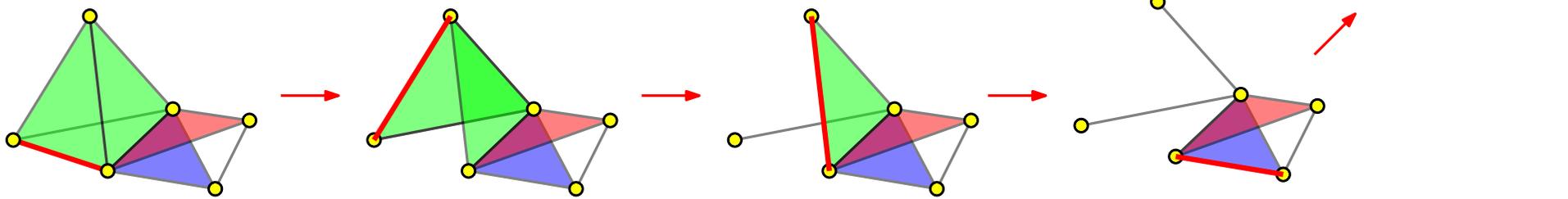
Wegner. Pour toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d , $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ admet un d -effritement.

Idée

Faire parcourir à un point p l'espace \mathbb{R}^d dans l'ordre lexicographique.

Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



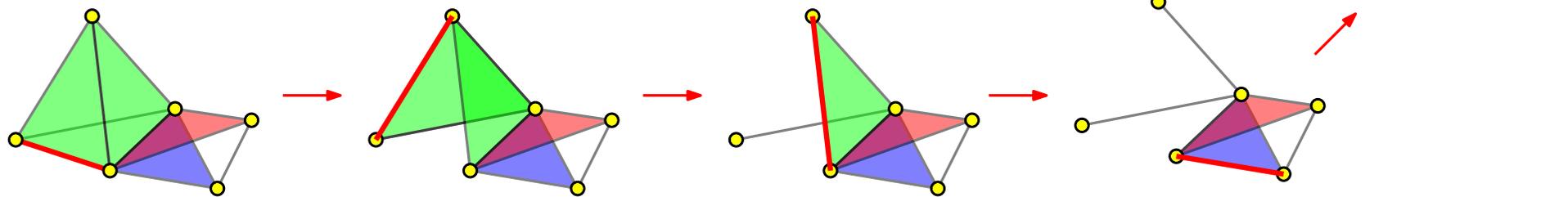
Wegner. Pour toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d , $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ admet un d -effritement.

Idée

Faire parcourir à un point p l'espace \mathbb{R}^d dans l'ordre lexicographique.
 À mesure que p avance, effacer les points $\prec p$.

Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



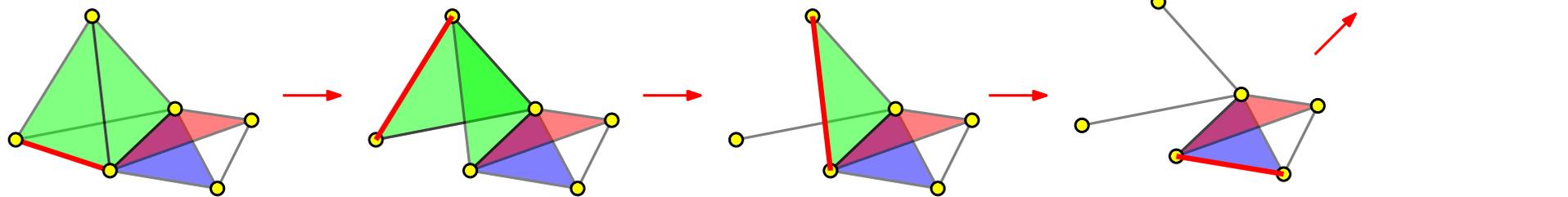
Wegner. Pour toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d , $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ admet un d -effritement.

Idée

Faire parcourir à un point p l'espace \mathbb{R}^d dans l'ordre lexicographique.
 À mesure que p avance, effacer les points $\prec p$.
 Les objets se réduisent (mais restent convexes).

Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



Wegner. Pour toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d , $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ admet un d -effritement.

Idée

Faire parcourir à un point p l'espace \mathbb{R}^d dans l'ordre lexicographique.

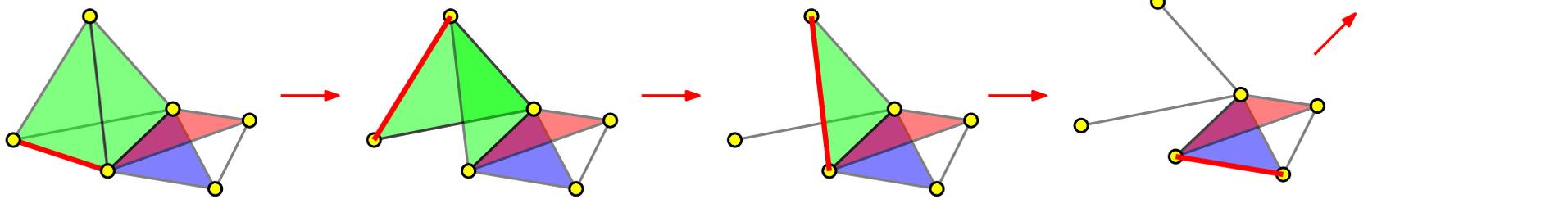
À mesure que p avance, effacer les points $\prec p$.

Les objets se réduisent (mais restent convexes).

Le nerf se réduit par étapes, une étape de réduction \simeq un effritement.

Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



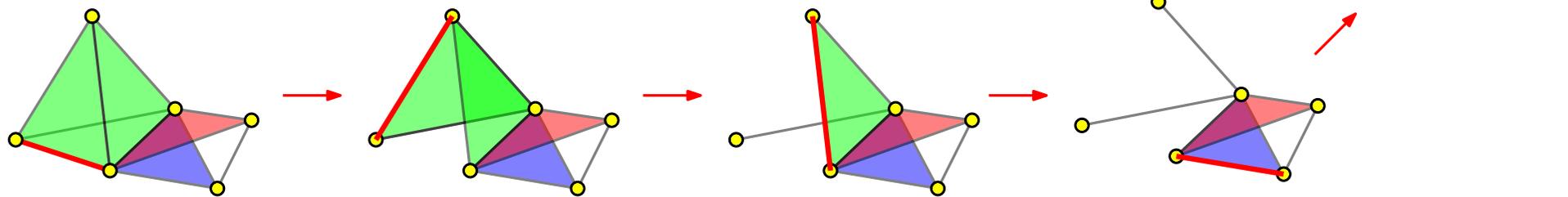
Wegner. Pour toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d , $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ admet un d -effritement.

Idée

Faire parcourir à un point p l'espace \mathbb{R}^d dans l'ordre lexicographique.
 À mesure que p avance, effacer les points $\prec p$.
 Les objets se réduisent (mais restent convexes).
 Le nerf se réduit par étapes, une étape de réduction \simeq un effritement.
 τ disparaît du nerf au point $\max_{\prec} \cap \tau \dots$

Un d -effritement de \mathcal{C} est un complexe simplicial \mathcal{C}' obtenu par une suite d'effritements $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \searrow \mathcal{C}_1 \searrow \dots \searrow \mathcal{C}_t = \mathcal{C}'$ telle que

- (i) à chaque \searrow , la face minimale supprimée est de dimension $= d - 1$,
- (ii) $\dim \mathcal{C}' \leq d - 1$.



Wegner. Pour toute famille finie de convexes de \mathbb{R}^d , $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ admet un d -effritement.

Idée

Faire parcourir à un point p l'espace \mathbb{R}^d dans l'ordre lexicographique.

À mesure que p avance, effacer les points $\prec p$.

Les objets se réduisent (mais restent convexes).

Le nerf se réduit par étapes, une étape de réduction \simeq un effritement.

τ disparaît du nerf au point $\max_{\prec} \cap \tau \dots = \max_{\prec} \cap \sigma$ pour un $\sigma \subset \tau$ avec $|\sigma| \leq d$.

Kalai. $\forall n, d, r$, pour tout complexe simplicial \mathcal{C} à n sommets admettant un d -effritement, on a

$$f_{d+r}(\mathcal{C}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall d \leq k \leq d + r - 1, \quad f_k(\mathcal{C}) \leq \sum_{i=0}^d \binom{n-r}{i} \binom{r}{k-i+1}.$$

Kalai. $\forall n, d, r$, pour tout complexe simplicial \mathcal{C} à n sommets admettant un d -effritement, on a

$$f_{d+r}(\mathcal{C}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall d \leq k \leq d + r - 1, \quad f_k(\mathcal{C}) \leq \sum_{i=0}^d \binom{n-r}{i} \binom{r}{k-i+1}.$$

Remarques : - Principal ingrédient de la caractérisation des nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .

Kalai. $\forall n, d, r$, pour tout complexe simplicial \mathcal{C} à n sommets admettant un d -effritement, on a

$$f_{d+r}(\mathcal{C}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall d \leq k \leq d + r - 1, \quad f_k(\mathcal{C}) \leq \sum_{i=0}^d \binom{n-r}{i} \binom{r}{k-i+1}.$$

- Remarques :
- Principal ingrédient de la caractérisation des nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .
 - Implique une version optimale du théorème de Helly fractionnaire :

$\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie \mathcal{F} de convexes de \mathbb{R}^d , si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de \mathcal{F} a un point en commun.

Kalai. $\forall n, d, r$, pour tout complexe simplicial \mathcal{C} à n sommets admettant un d -effritement, on a

$$f_{d+r}(\mathcal{C}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall d \leq k \leq d + r - 1, \quad f_k(\mathcal{C}) \leq \sum_{i=0}^d \binom{n-r}{i} \binom{r}{k-i+1}.$$

- Remarques :
- Principal ingrédient de la caractérisation des nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .
 - Implique une version optimale du théorème de Helly fractionnaire :

$\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie \mathcal{F} de convexes de \mathbb{R}^d , si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de \mathcal{F} a un point en commun.

- Une preuve simple est donnée dans le chapitre (Alon-Kalai).

Kalai. $\forall n, d, r$, pour tout complexe simplicial \mathcal{C} à n sommets admettant un d -effritement, on a

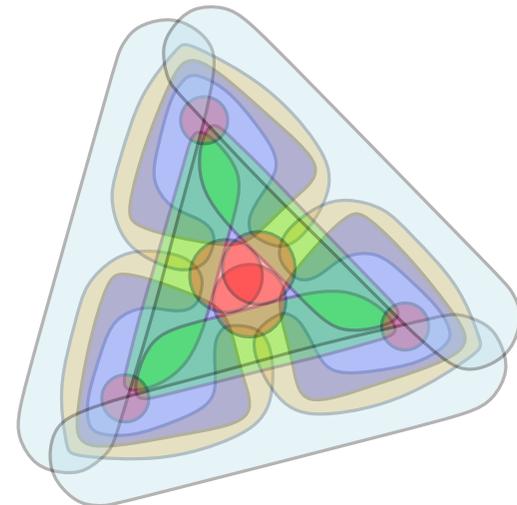
$$f_{d+r}(\mathcal{C}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall d \leq k \leq d + r - 1, \quad f_k(\mathcal{C}) \leq \sum_{i=0}^d \binom{n-r}{i} \binom{r}{k-i+1}.$$

- Remarques :
- Principal ingrédient de la caractérisation des nerfs de convexes de \mathbb{R}^d .
 - Implique une version optimale du théorème de Helly fractionnaire :

$\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie \mathcal{F} de convexes de \mathbb{R}^d , si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de \mathcal{F} a un point en commun.

- Une preuve simple est donnée dans le chapitre (Alon-Kalai).

Les nerfs de **bonnes couvertures** n'admettent pas de d -effritement !



changement de transparents