Autour de la convexité combinatoire

Xavier Goaoc
École des Mines de Nancy - LORIA
Université de Lorraine

EJCIM 2020

8-19 juin

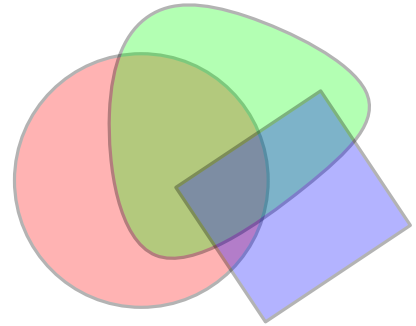
Édition confinée

Commence par de la convexité combinatoire.

Propriétés des sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^d$.

d finie mais arbitraire.

Quelques outils simples pour faire de la géométrie par des raisonnements combinatoires.

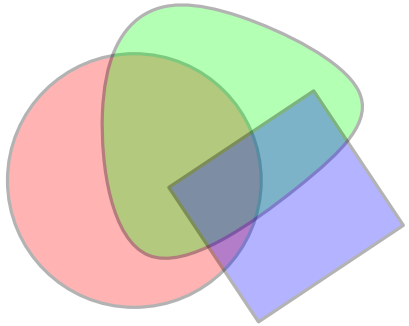


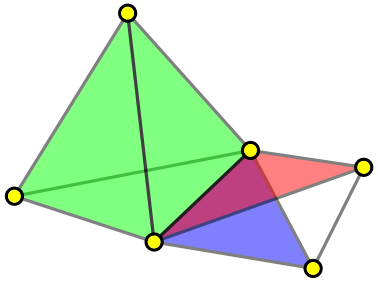
Commence par de la convexité combinatoire.

Propriétés des sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^d$.

d finie mais arbitraire.

Quelques outils simples pour faire de la géométrie par des raisonnements combinatoires.





Puis aller vers des structures mathématiques voisines.

Complexes simpliciaux, géométriques et abstraits.

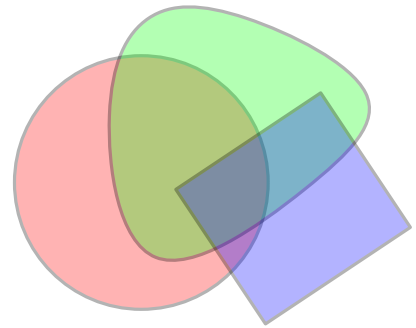
Un peu d'hypergraphes.

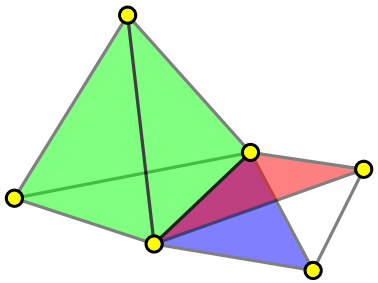
Commence par de la convexité combinatoire.

Propriétés des sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^d$.

d finie mais arbitraire.

Quelques outils simples pour faire de la géométrie par des raisonnements combinatoires.





Puis aller vers des structures mathématiques voisines.

Complexes simpliciaux, géométriques et abstraits.

Un peu d'hypergraphes.

Liens nombreux vers info et maths.

Combinatoire $\rightarrow$ algorithmique.

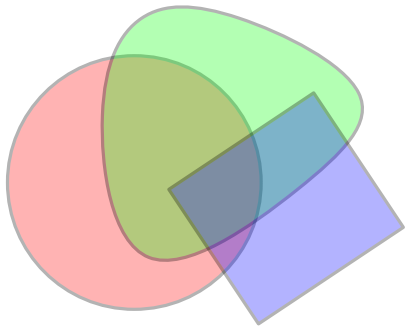
Cadre convexe = "prototype".

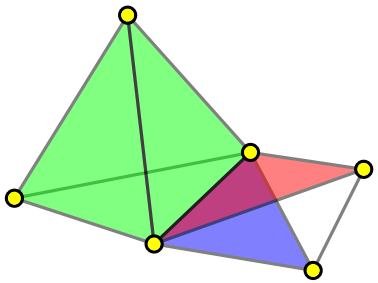
Commence par de la convexité combinatoire.

Propriétés des sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^d$.

d finie mais arbitraire.

Quelques outils simples pour faire de la géométrie par des raisonnements combinatoires.





Puis aller vers des structures mathématiques voisines.

Complexes simpliciaux, géométriques et abstraits.

Un peu d'hypergraphes.

Liens nombreux vers info et maths.

Combinatoire $\rightarrow$ algorithmique.

Cadre convexe = "prototype".

Idées élégantes, technique élémentaire.

Preuves complètes dans le chapître.

De nombreux problèmes ouverts.

1. Exemple introductif, en dimension 1

1. Exemple introductif, en dimension 1

Des intervalles de $\mathbb{R}$

1. Exemple introductif, en dimension 1

Des intervalles de $\mathbb{R}$

≪ Si beaucoup de paires d'intervalles se coupent

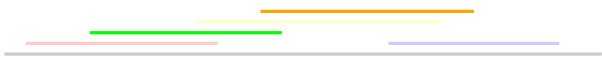
alors il existe un point qui est dans beaucoup d'intervalles. ≫

Proposition. Si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$ paires se coupent, alors il existe un point commun à $\geq \frac{p}{n} + 1$ des intervalles.

Proposition. Si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$ paires se coupent, alors il existe un point commun à $\geq \frac{p}{n} + 1$ des intervalles.

Intersection $\neq \emptyset \mapsto$ point maximal.

Proposition. Si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$ paires se coupent, alors il existe un point commun à $\geq \frac{p}{n} + 1$ des intervalles.



Intersection $\neq \emptyset \mapsto$ point maximal.

Proposition. Si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$ paires se coupent, alors il existe un point commun à $\geq \frac{p}{n} + 1$ des intervalles.

Intersection $\neq \emptyset \mapsto$ point maximal.

Proposition. Si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$ paires se coupent, alors il existe un point commun à $\geq \frac{p}{n} + 1$ des intervalles.

Intersection $\neq \emptyset \mapsto$ point maximal.

p intersections, $n - 1$ points maximaux.

max $\in$ extrémités droites d'intervalles.

Proposition. Si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$ paires se coupent, alors il existe un point commun à $\geq \frac{p}{n} + 1$ des intervalles.

Intersection $\neq \emptyset \mapsto$ point maximal.

p intersections, $n - 1$ points maximaux.

max $\in$ extrémités droites d'intervalles.

Une extrémité chargée $\geq \lceil \frac{p}{n-1} \rceil$ fois.

Proposition. Si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$ paires se coupent, alors il existe un point commun à $\geq \frac{p}{n} + 1$ des intervalles.

Intersection $\neq \emptyset \mapsto$ point maximal.

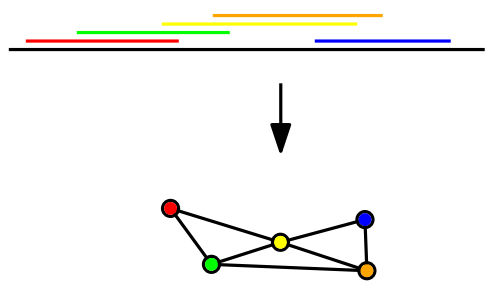
p intersections, $n - 1$ points maximaux.

max $\in$ extrémités droites d'intervalles.

Une extrémité chargée $\geq \lceil \frac{p}{n-1} \rceil$ fois.

Les graphes d'intersection des familles d'intervalles ont une structure particulière.

Densité positive $\Rightarrow$ clique de taille linéaire.



Proposition. Si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$ paires se coupent, alors il existe un point commun à $\geq \frac{p}{n} + 1$ des intervalles.

Intersection $\neq \emptyset \mapsto$ point maximal.

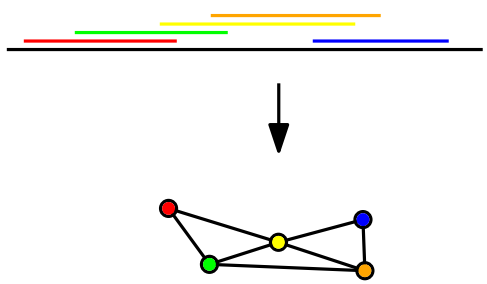
p intersections, $n - 1$ points maximaux.

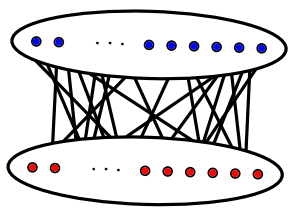
max $\in$ extrémités droites d'intervalles.

Une extrémité chargée $\geq \lceil \frac{p}{n-1} \rceil$ fois.

Les graphes d'intersection des familles d'intervalles ont une structure particulière.

Densité positive $\Rightarrow$ clique de taille linéaire.





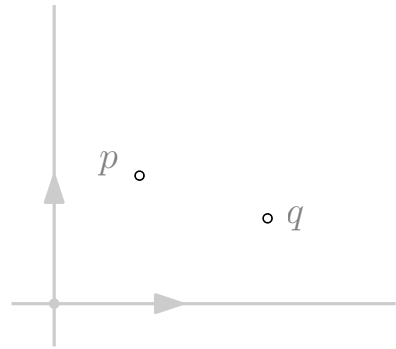
2. Un peu de vocabulaire géométrique

Espace $\mathbb{R}^d$, segment, convexe, enveloppe convexe, simplexe

Géométrie affine dans $\mathbb{R}^d$, point de vue "Cartésien".

Points $p = (p_1, p_2, \ldots, p_d)$ et vecteurs $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$.

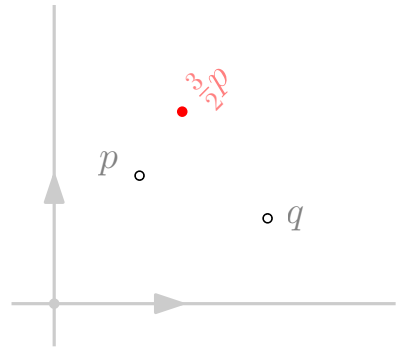
Structure vectorielle : $\alpha p + \beta q \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha p_1 + \beta q_1, \alpha p_2 + \beta q_2, \ldots, \alpha p_d + \beta q_d)$.



Géométrie affine dans $\mathbb{R}^d$, point de vue "Cartésien".

Points $p = (p_1, p_2, \ldots, p_d)$ et vecteurs $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$.

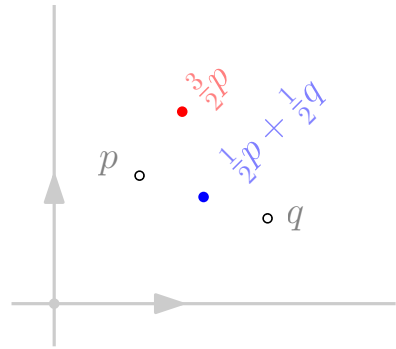
Structure vectorielle : $\alpha p + \beta q \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha p_1 + \beta q_1, \alpha p_2 + \beta q_2, \ldots, \alpha p_d + \beta q_d)$.



Géométrie affine dans $\mathbb{R}^d$, point de vue "Cartésien".

Points $p = (p_1, p_2, \ldots, p_d)$ et vecteurs $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$.

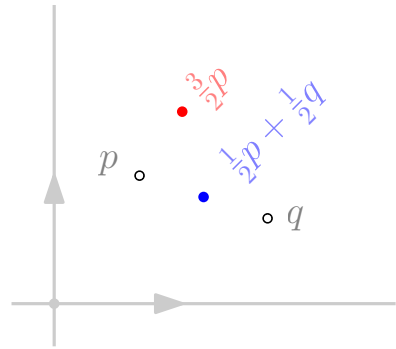
Structure vectorielle : $\alpha p + \beta q \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha p_1 + \beta q_1, \alpha p_2 + \beta q_2, \ldots, \alpha p_d + \beta q_d)$.



Géométrie affine dans $\mathbb{R}^d$, point de vue "Cartésien".

Points $p = (p_1, p_2, \ldots, p_d)$ et vecteurs $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$.

Structure vectorielle : $\alpha p + \beta q \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha p_1 + \beta q_1, \alpha p_2 + \beta q_2, \ldots, \alpha p_d + \beta q_d)$.



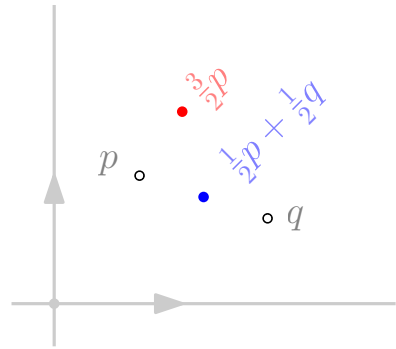
Segment = ensemble des combinaisons convexes de deux points.

$\stackrel{\text{def}}{=}$ combinaisons linéaires, poids ≥ 0 et $\sum$ poids $= 1$.

Géométrie affine dans $\mathbb{R}^d$, point de vue "Cartésien".

Points $p = (p_1, p_2, \ldots, p_d)$ et vecteurs $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$.

Structure vectorielle : $\alpha p + \beta q \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha p_1 + \beta q_1, \alpha p_2 + \beta q_2, \ldots, \alpha p_d + \beta q_d)$.

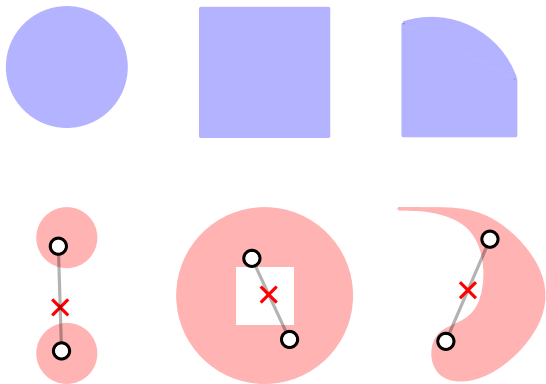


Segment = ensemble des combinaisons convexes de deux points.

$\stackrel{\text{def}}{=}$ combinaisons linéaires, poids ≥ 0 et $\sum$ poids $= 1$.

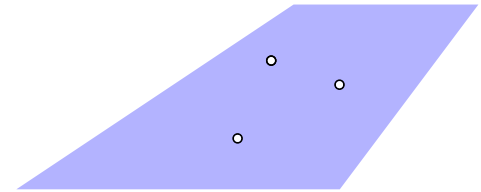
$X \subseteq \mathbb{R}^d$ est convexe

$\Leftrightarrow$ X contient tout segment entre deux points de X.



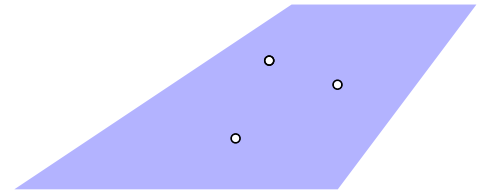
Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.

droite $(d = 2)$, plan $(d = 3)$, ...



Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.

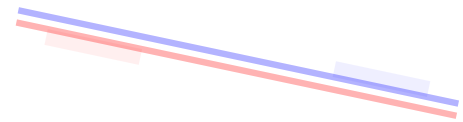
droite $(d = 2)$, plan $(d = 3)$, ...



demi-espace $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une inéquation linéaire.

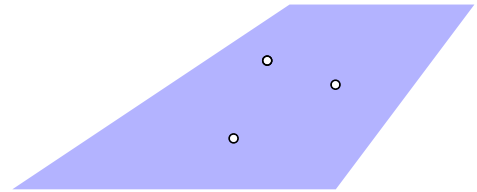
$< . >$ demi-espace ouvert.

$\leq, \geq$ demi-espace fermé.



Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.

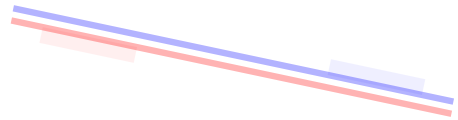
droite $(d = 2)$, plan $(d = 3)$, ...



demi-espace $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une inéquation linéaire.

$< . >$ demi-espace ouvert.

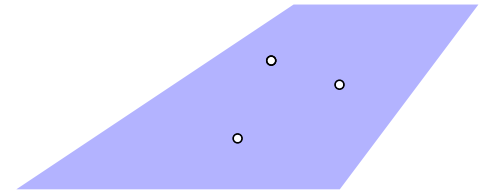
$\leq, \geq$ demi-espace fermé.



Un hyperplan borde 2 demi-espaces ouverts et 2 demi-espaces fermés.

Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.

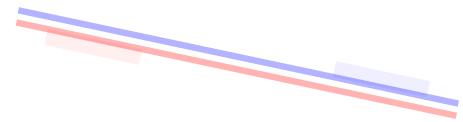
droite $(d = 2)$, plan $(d = 3)$, ...



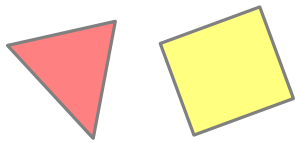
demi-espace $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une inéquation linéaire.

$<\ .\ >$ demi-espace ouvert.

$\leq, \geq$ demi-espace fermé.



Un hyperplan borde 2 demi-espaces ouverts et 2 demi-espaces fermés.

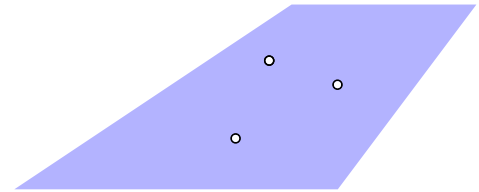


Un hyperplan h sépare deux ensembles A, B s'ils sont contenus dans des demi-espaces fermés distincts bordés par h.

Idem avec demi-espaces ouverts : séparation stricte.

Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.

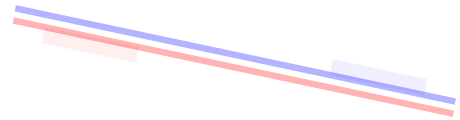
droite $(d = 2)$, plan $(d = 3)$, ...



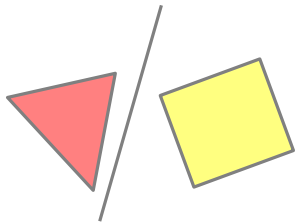
demi-espace $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une inéquation linéaire.

$< . >$ demi-espace ouvert.

$\leq, \geq$ demi-espace fermé.



Un hyperplan borde 2 demi-espaces ouverts et 2 demi-espaces fermés.

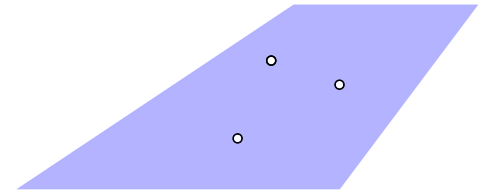


Un hyperplan h sépare deux ensembles A, B s'ils sont contenus dans des demi-espaces fermés distincts bordés par h.

Idem avec demi-espaces ouverts : séparation stricte.

Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.

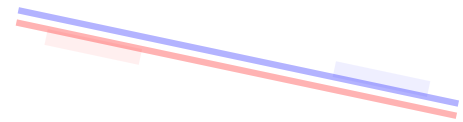
droite $(d = 2)$, plan $(d = 3)$, ...



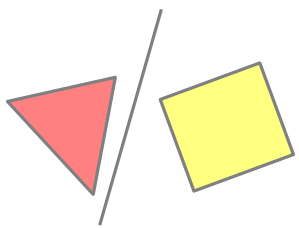
demi-espace $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une inéquation linéaire.

$< . >$ demi-espace ouvert.

$\leq, \geq$ demi-espace fermé.



Un hyperplan borde 2 demi-espaces ouverts et 2 demi-espaces fermés.

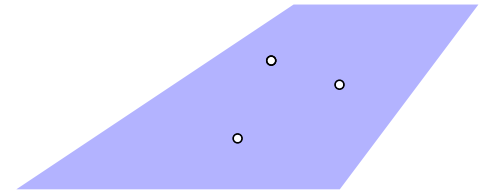


Un hyperplan h sépare deux ensembles A, B s'ils sont contenus dans des demi-espaces fermés distincts bordés par h.

Idem avec demi-espaces ouverts : séparation stricte.

Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.

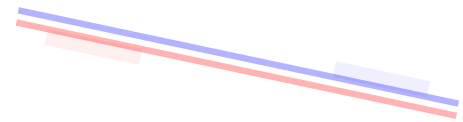
droite $(d = 2)$, plan $(d = 3)$, ...



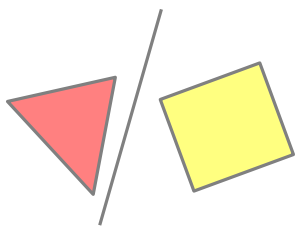
demi-espace $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une inéquation linéaire.

$< . >$ demi-espace ouvert.

$\leq, \geq$ demi-espace fermé.



Un hyperplan borde 2 demi-espaces ouverts et 2 demi-espaces fermés.



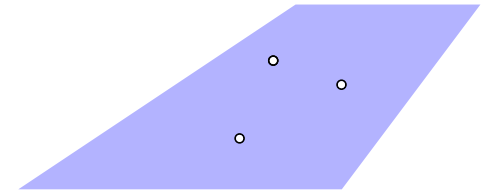
Un hyperplan h sépare deux ensembles A, B s'ils sont contenus dans des demi-espaces fermés distincts bordés par h.

Idem avec demi-espaces ouverts : séparation stricte.

Séparation. Toute paire de convexes disjoints de $\mathbb{R}^d$ peut être séparée. Si l'un des convexes est compact, la séparation peut être stricte.

Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.

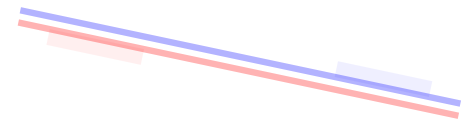
droite $(d = 2)$, plan $(d = 3)$, ...



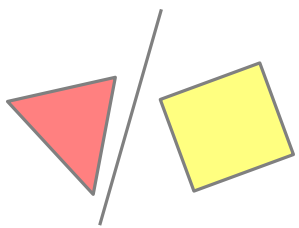
demi-espace $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une inéquation linéaire.

$< . >$ demi-espace ouvert.

$\leq, \geq$ demi-espace fermé.



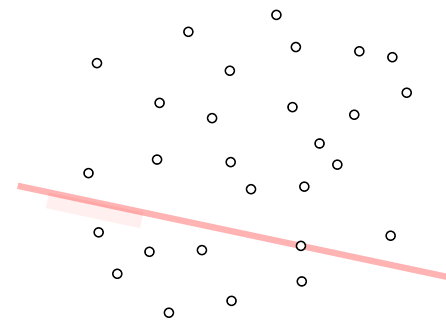
Un hyperplan borde 2 demi-espaces ouverts et 2 demi-espaces fermés.



Un hyperplan h sépare deux ensembles A, B s'ils sont contenus dans des demi-espaces fermés distincts bordés par h.

Idem avec demi-espaces ouverts : séparation stricte.

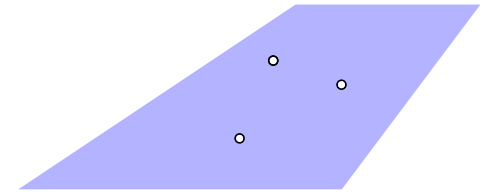
Séparation. Toute paire de convexes disjoints de $\mathbb{R}^d$ peut être séparée.
Si l'un des convexes est compact, la séparation peut être stricte.



Si D est un demi-espace fermé et $P \subset \mathbb{R}^d$ est fini,
il existe un demi-espace fermé D' t. q. $P \cap D' = P \setminus D$.

Hyperplan $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une équation linéaire.

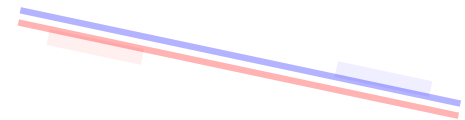
droite $(d = 2)$, plan $(d = 3)$, ...



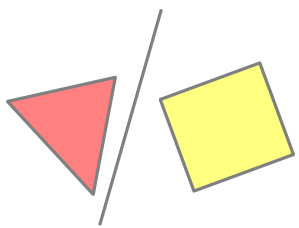
demi-espace $\stackrel{\text{def}}{=}$ ensemble de solutions d'une inéquation linéaire.

$< . >$ demi-espace ouvert.

$\leq, \geq$ demi-espace fermé.



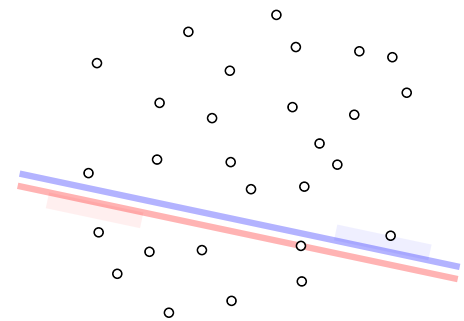
Un hyperplan borde 2 demi-espaces ouverts et 2 demi-espaces fermés.



Un hyperplan h sépare deux ensembles A, B s'ils sont contenus dans des demi-espaces fermés distincts bordés par h.

Idem avec demi-espaces ouverts : séparation stricte.

Séparation. Toute paire de convexes disjoints de $\mathbb{R}^d$ peut être séparée.
Si l'un des convexes est compact, la séparation peut être stricte.

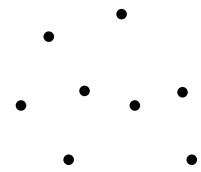


Si D est un demi-espace fermé et $P \subset \mathbb{R}^d$ est fini,
il existe un demi-espace fermé D' t. q. $P \cap D' = P \setminus D$.

Opérateur d'enveloppe convexe.

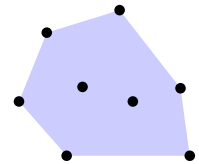
$$\mathrm{conv}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \in \mathbb{N}^*, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Opérateur d'enveloppe convexe.



$$\mathrm{conv}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \in \mathbb{N}^*, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

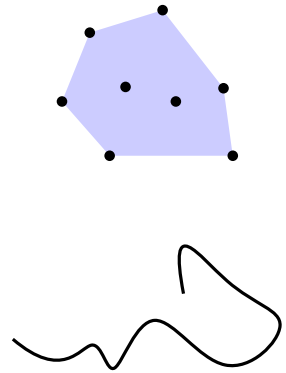
Opérateur d'enveloppe convexe.



$$\mathrm{conv}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \in \mathbb{N}^*, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

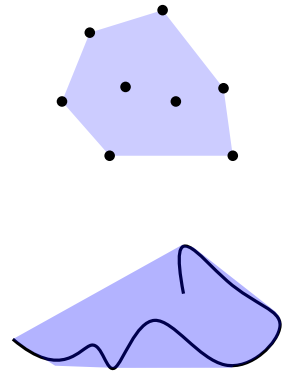
Opérateur d'enveloppe convexe.

$$\mathrm{conv}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \in \mathbb{N}^*, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$



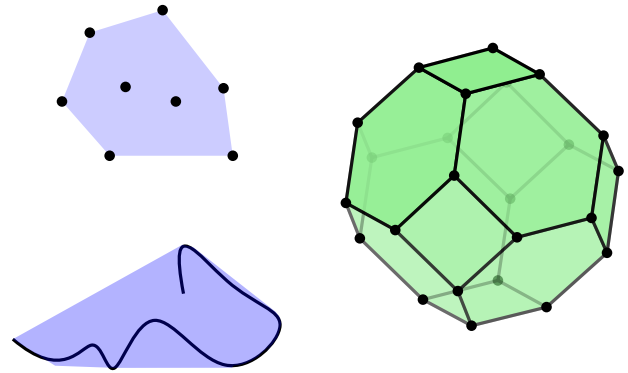
Opérateur d'enveloppe convexe.

$$\mathrm{conv}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \in \mathbb{N}^*, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$



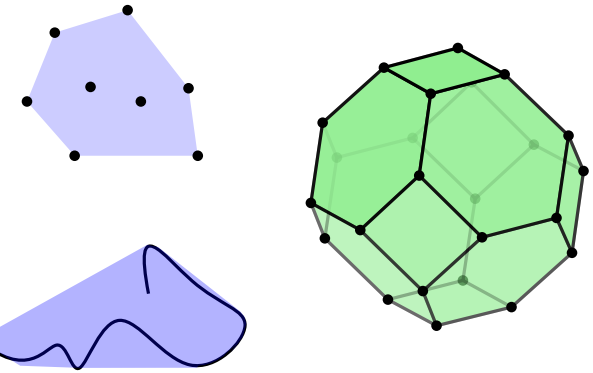
Opérateur d'enveloppe convexe.

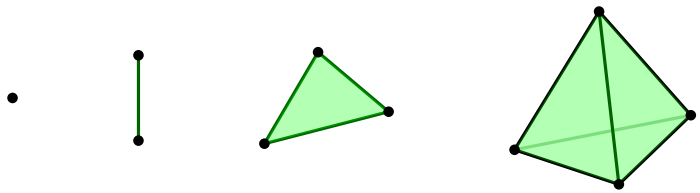
$$\mathrm{conv}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \in \mathbb{N}^*, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$



Opérateur d'enveloppe convexe.

$$\mathrm{conv}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \in \mathbb{N}^*, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$





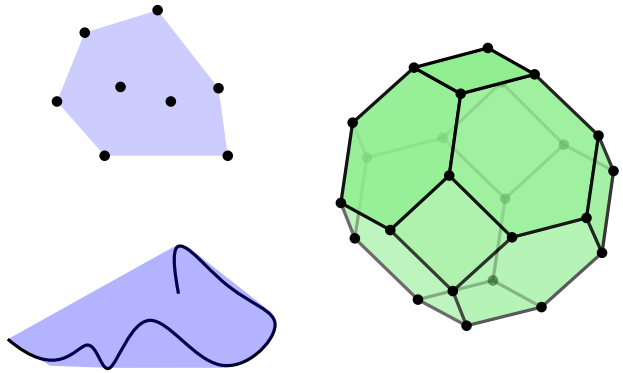
Simplexe $\stackrel{\text{def}}{=}$ enveloppe convexe d'un ensemble affinement indépendant.

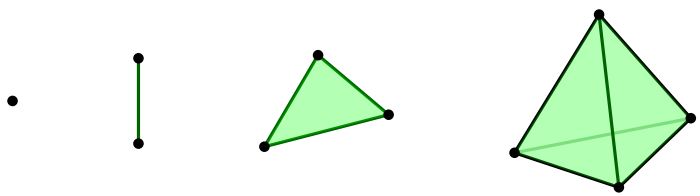
Aucun point n'appartient à l'enveloppe affine des autres.

$\stackrel{\text{def}}{=}$ comb. linéaires de $\sum$ poids $= 1$.

Opérateur d'enveloppe convexe.

$$\mathrm{conv}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \in \mathbb{N}^*, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$





Simplexe $\stackrel{\text{def}}{=}$ enveloppe convexe d'un ensemble affinement indépendant.

Aucun point n'appartient à l'enveloppe affine des autres.

$\stackrel{\text{def}}{=}$ comb. linéaires de $\sum$ poids $= 1$.

Première question : quelles règles régissent le "calcul convexe" ?

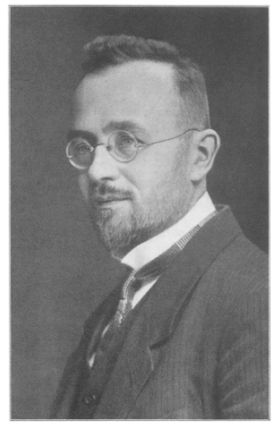
Parties indépendantes ? Parties génératrices ?

$\simeq$ théorème de la base de l'algèbre linéaire ?

3. Les trois piliers

Trois énoncés élémentaires mais fondamentaux.

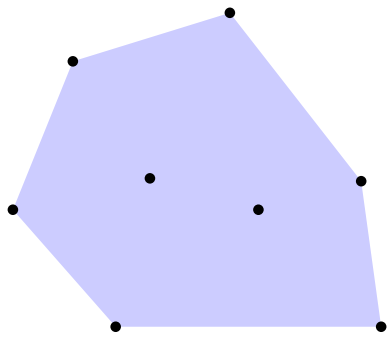
C. Carathéodory



J. Radon

E. Helly

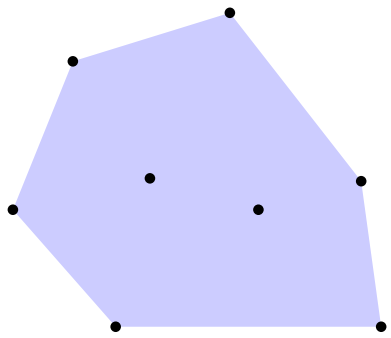
Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.



$\mathrm{conv}(X) =$ l'union des simplexes à sommets dans X.

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \leq d+1, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.



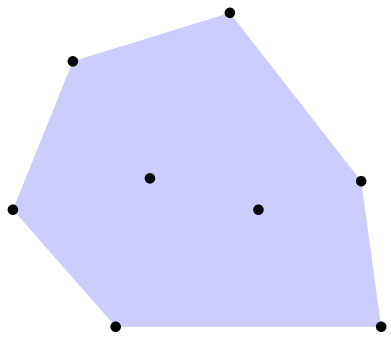
$\mathrm{conv}(X) =$ l'union des simplexes à sommets dans X.

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \leq d+1, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Une forme de "relation de dépendance convexe".

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.



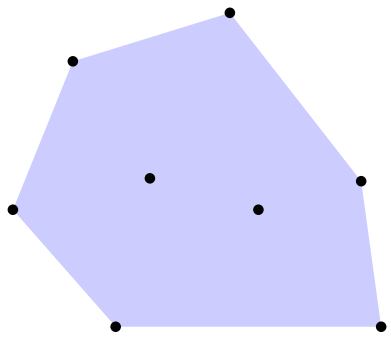
$\mathrm{conv}(X) =$ l'union des simplexes à sommets dans X.

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \leq d+1, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Une forme de "relation de dépendance convexe".

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.



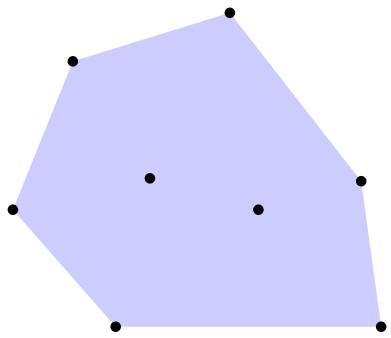
$\mathrm{conv}(X) =$ l'union des simplexes à sommets dans X.

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \leq d+1, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Une forme de "relation de dépendance convexe".

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.



$\mathrm{conv}(X) =$ l'union des simplexes à sommets dans X.

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \leq d+1, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

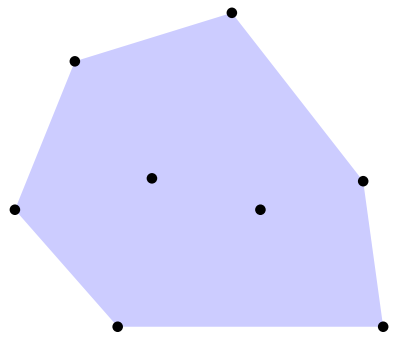
Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Une forme de "relation de dépendance convexe".

Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Chaque $(d+1)$-uplet se coupe $\Rightarrow$ la famille entière a un point en commun.

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.



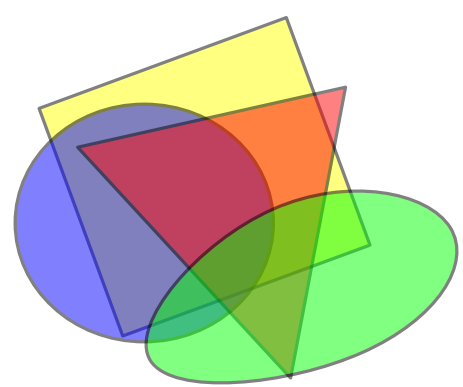
$\mathrm{conv}(X) =$ l'union des simplexes à sommets dans X.

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \leq d+1, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

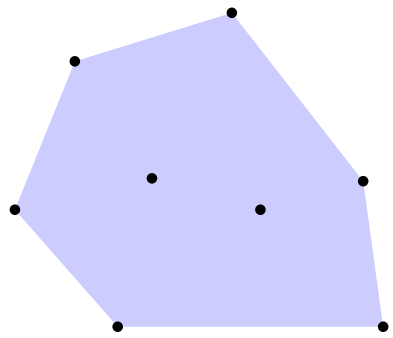
Une forme de "relation de dépendance convexe".

Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.



Chaque $(d+1)$-uplet se coupe $\Rightarrow$ la famille entière a un point en commun.

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.



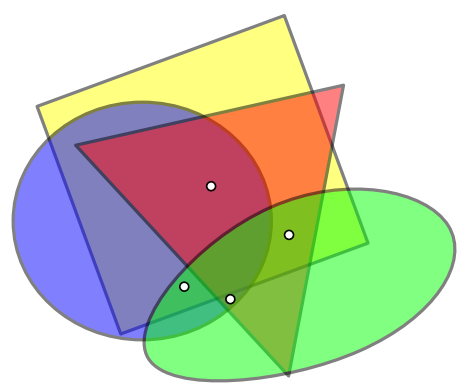
$\mathrm{conv}(X) =$ l'union des simplexes à sommets dans X.

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \leq d+1, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

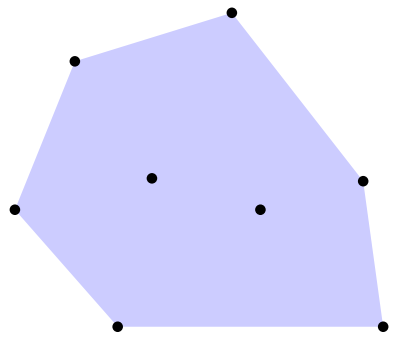
Une forme de "relation de dépendance convexe".

Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.



Chaque $(d+1)$-uplet se coupe $\Rightarrow$ la famille entière a un point en commun.

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.



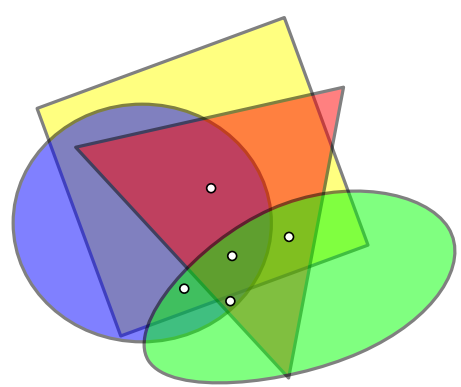
$\mathrm{conv}(X) =$ l'union des simplexes à sommets dans X.

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \ : \ n \leq d+1, p_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Une forme de "relation de dépendance convexe".

Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.



Chaque $(d+1)$-uplet se coupe $\Rightarrow$ la famille entière a un point en commun.

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

$p_1, p_2, \ldots, p_{d+2}$ des points de $\mathbb{R}^d$

Preuve

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Preuve

$p_1, p_2, \ldots, p_{d+2}$ des points de $\mathbb{R}^d$

$\overrightarrow{p} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_{d+2}} \in \mathbb{R}^{d+1}$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

$p_1, p_2, \ldots, p_{d+2}$ des points de $\mathbb{R}^d$

$$\Big\downarrow \qquad \overrightarrow{p} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_{d+2}} \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = 0.$$

Preuve

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Preuve

$p_1, p_2, \ldots, p_{d+2}$ des points de $\mathbb{R}^d$

$\Big\downarrow \quad \overrightarrow{p} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_{d+2}} \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = 0.$$

$\Big\downarrow$

$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j \overrightarrow{p_j}$$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Preuve

$p_1, p_2, \ldots, p_{d+2}$ des points de $\mathbb{R}^d$

$\Big\downarrow \quad \overrightarrow{p} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_{d+2}} \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = 0.$$

$\downarrow$

$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j \overrightarrow{p_j}$$

$\swarrow$

$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j.$$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Preuve

$p_1, p_2, \ldots, p_{d+2}$ des points de $\mathbb{R}^d$

$\Big\downarrow \quad \overrightarrow{p} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_{d+2}} \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = 0.$$

$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j \overrightarrow{p_j}$$

$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j. \qquad \sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i p_i = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j p_j$$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Preuve

$p_1, p_2, \ldots, p_{d+2}$ des points de $\mathbb{R}^d$

$\Big\downarrow \quad \overrightarrow{p} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_{d+2}} \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = 0.$$

$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j \overrightarrow{p_j}$$

$$\underbrace{\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i}_{\stackrel{\text{def}}{=} \alpha} = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j. \qquad \sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i p_i = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j p_j$$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Preuve

$p_1, p_2, \ldots, p_{d+2}$ des points de $\mathbb{R}^d$

$\updownarrow \quad \overrightarrow{p} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_{d+2}} \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = 0.$$

$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j \overrightarrow{p_j}$$

$$\underbrace{\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i}_{\stackrel{\text{def}}{=} \alpha} = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j. \qquad \sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i p_i = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j p_j$$

$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha}\right) p_i = \sum_{j\,:\,\alpha_j < 0} \left(\frac{-\alpha_j}{\alpha}\right) p_j$$

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Preuve

$p_1, p_2, \ldots, p_{d+2}$ des points de $\mathbb{R}^d$

$\updownarrow \quad \overrightarrow{p} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_{d+2}} \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = 0.$$

$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i \overrightarrow{p_i} = \sum_{j:\alpha_j < 0} -\alpha_j \overrightarrow{p_j}$$

$$\underbrace{\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i}_{\stackrel{\text{def}}{=} \alpha} = \sum_{j:\alpha_j<0} -\alpha_j. \qquad \sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i p_i = \sum_{j:\alpha_j<0} -\alpha_j p_j$$

$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha}\right) p_i = \sum_{j\,:\,\alpha_j<0} \left(\frac{-\alpha_j}{\alpha}\right) p_j$$

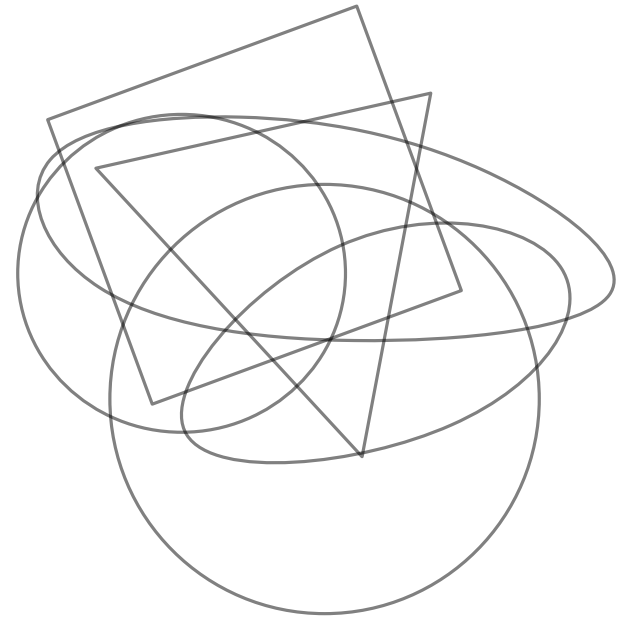
Les enveloppes convexes de $\{p_i : \alpha_i \geq 0\}$ et $\{p_j : \alpha_j < 0\}$ se coupent. □

Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Preuve

La contraposée en dimension 2.

n convexes dans $\mathbb{R}^2$, se coupant 3 à 3.



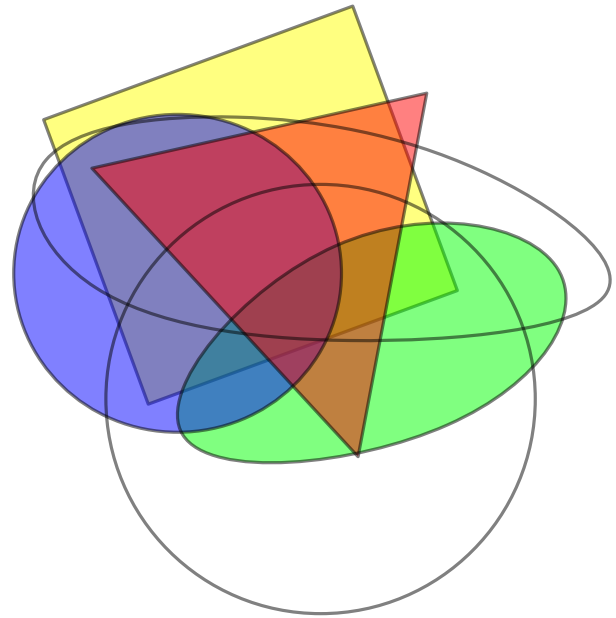
Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Preuve

La contraposée en dimension 2.

n convexes dans $\mathbb{R}^2$, se coupant 3 à 3.

Prenons-en 4 : A_1, A_2, A_3 et A_4.



Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

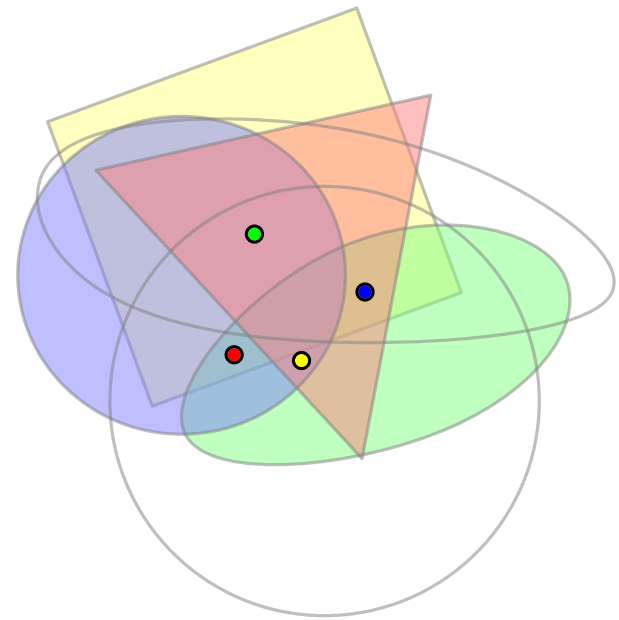
Preuve

La contraposée en dimension 2.

n convexes dans $\mathbb{R}^2$, se coupant 3 à 3.

Prenons-en 4 : A_1, A_2, A_3 et A_4.

Prenons $p_i \in \cap_{j \neq i} A_j$.



Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Preuve

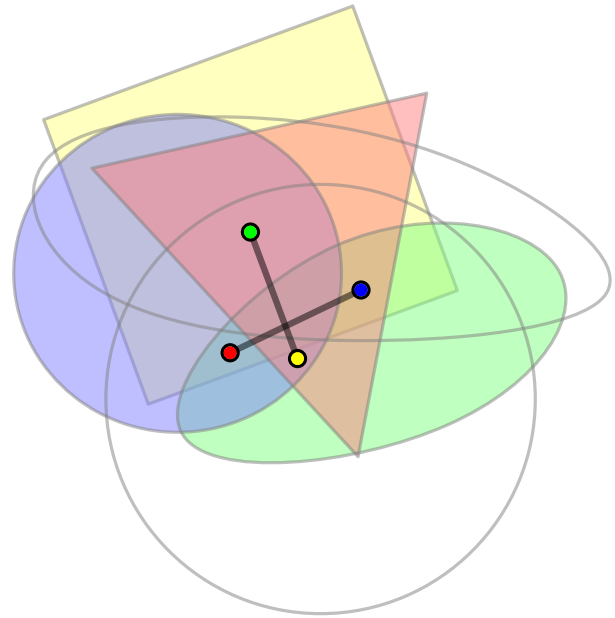
La contraposée en dimension 2.

n convexes dans $\mathbb{R}^2$, se coupant 3 à 3.

Prenons-en 4 : A_1, A_2, A_3 et A_4.

Prenons $p_i \in \cap_{j \neq i} A_j$.

Appliquons **Radon** à $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.



Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Preuve

La contraposée en dimension 2.

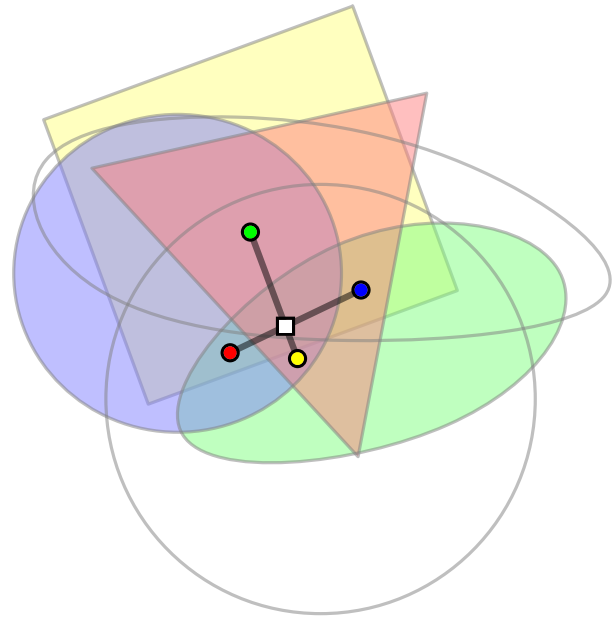
n convexes dans $\mathbb{R}^2$, se coupant 3 à 3.

Prenons-en 4 : A_1, A_2, A_3 et A_4.

Prenons $p_i \in \cap_{j \neq i} A_j$.

Appliquons **Radon** à $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

$\square \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.



Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Preuve

La contraposée en dimension 2.

n convexes dans $\mathbb{R}^2$, se coupant 3 à 3.

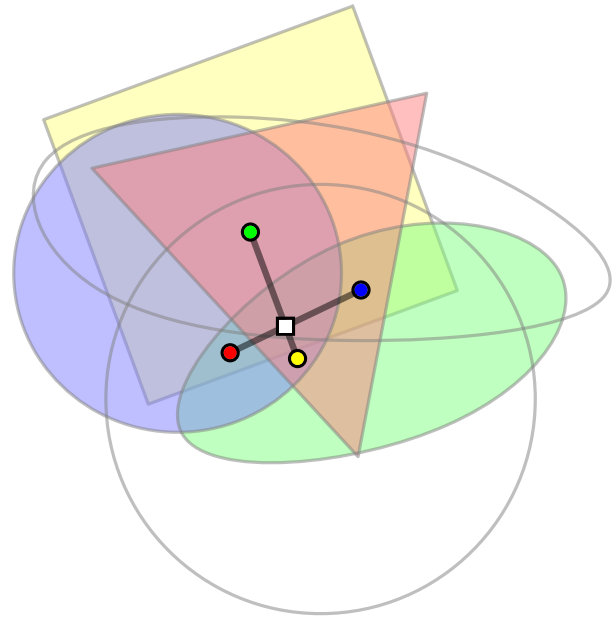
Prenons-en 4 : A_1, A_2, A_3 et A_4.

Prenons $p_i \in \cap_{j \neq i} A_j$.

Appliquons **Radon** à $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

$\square \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.

Les n convexes se coupent 4 à 4. Prenons en 5...



Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Preuve

La contraposée en dimension 2.

n convexes dans $\mathbb{R}^2$, se coupant 3 à 3.

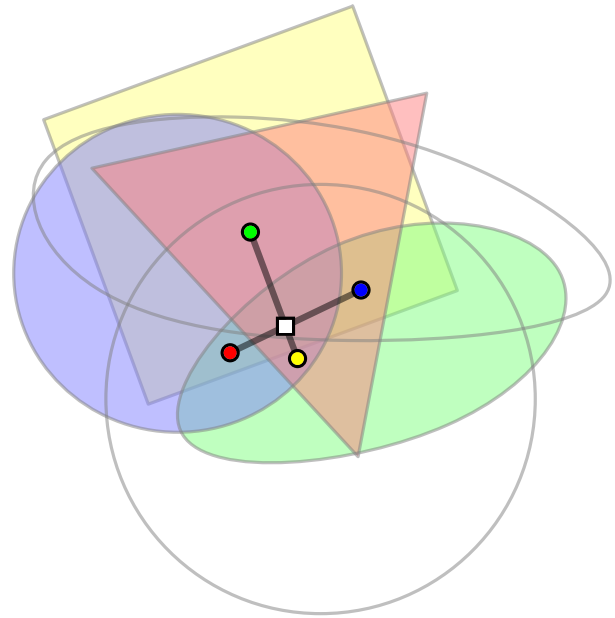
Prenons-en 4 : A_1, A_2, A_3 et A_4.

Prenons $p_i \in \cap_{j \neq i} A_j$.

Appliquons **Radon** à $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

$\square \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.

Les n convexes se coupent 4 à 4. Prenons en 5... $\square$



Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Quelques applications directes (en exercice) :

- L'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Quelques applications directes (en exercice) :

- L'enveloppe convexe d'un compact est compacte.
- Si $P \cup Q$ est affinement indépendant, alors $\mathrm{conv}(P \cap Q) = \mathrm{conv}(P) \cap \mathrm{conv}(Q)$.

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Quelques applications directes (en exercice) :

- L'enveloppe convexe d'un compact est compacte.
- Si $P \cup Q$ est affinement indépendant, alors $\mathrm{conv}(P \cap Q) = \mathrm{conv}(P) \cap \mathrm{conv}(Q)$.
- **Radon** se généralise à r sous-ensembles disjoints d'enveloppes convexes sécantes.

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

Quelques applications directes (en exercice) :

- L'enveloppe convexe d'un compact est compacte.
- Si $P \cup Q$ est affinement indépendant, alors $\mathrm{conv}(P \cap Q) = \mathrm{conv}(P) \cap \mathrm{conv}(Q)$.
- **Radon** se généralise à r sous-ensembles disjoints d'enveloppes convexes sécantes.
- R et B dans $\mathbb{R}^2$ sont linéairement séparables si dans tout quadruplet de $R \cup B$, les points de R et les points de B sont linéairement séparable.

Carathéodory : $p \in \mathrm{conv}(X) \Rightarrow \exists$ un simplexe à sommets dans X contenant p.

Radon : Tout ensemble de $n \geq d+2$ points de $\mathbb{R}^d$ contient deux sous-ensembles disjoints dont les enveloppes convexes se coupent.

Helly : Toute famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont l'intersection est vide contient $\leq d+1$ membres dont l'intersection est déjà vide.

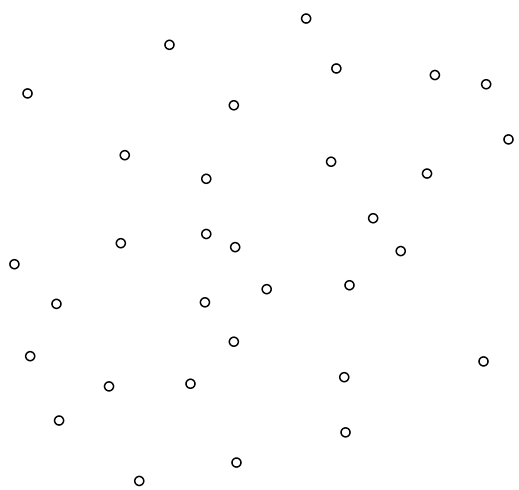
Quelques applications directes (en exercice) :

- L'enveloppe convexe d'un compact est compacte.
- Si $P \cup Q$ est affinement indépendant, alors $\mathrm{conv}(P \cap Q) = \mathrm{conv}(P) \cap \mathrm{conv}(Q)$.
- **Radon** se généralise à r sous-ensembles disjoints d'enveloppes convexes sécantes.
- R et B dans $\mathbb{R}^2$ sont linéairement séparables si dans tout quadruplet de $R \cup B$, les points de R et les points de B sont linéairement séparable.

Voyons une application moins directe...

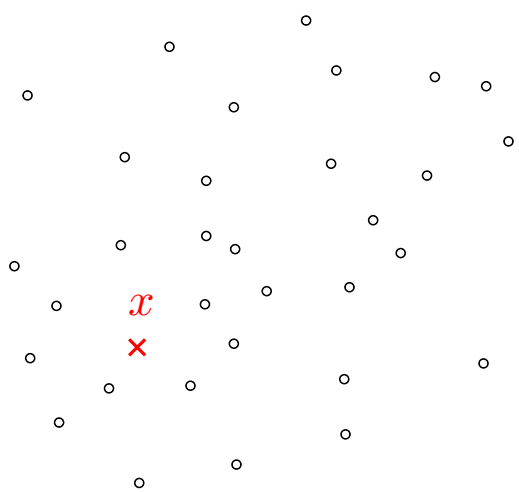
4. Un peu de statistique spatiale

4. Un peu de statistique spatiale



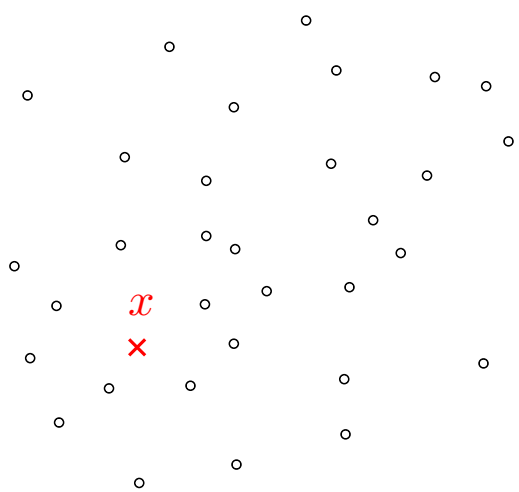
$P \subset \mathbb{R}^d$

4. Un peu de statistique spatiale



$P \subset \mathbb{R}^d$

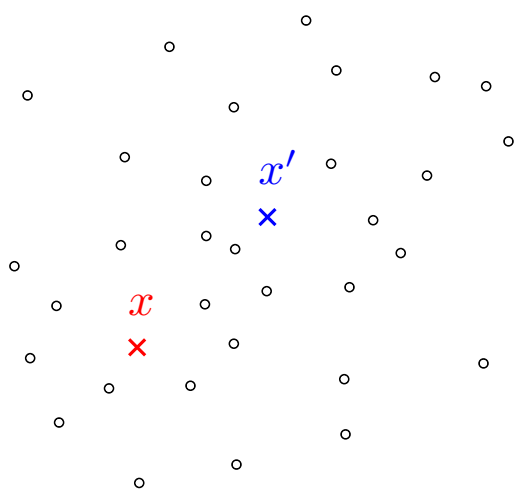
4. Un peu de statistique spatiale



$P \subset \mathbb{R}^d$

Comment mesurer la « profondeur »
de $x \in \mathbb{R}^d$ relativement à P ?

4. Un peu de statistique spatiale



$P \subset \mathbb{R}^d$

Comment mesurer la « profondeur »
de $x \in \mathbb{R}^d$ relativement à P ?

Qui de x ou x' est plus « intérieur » à P ?

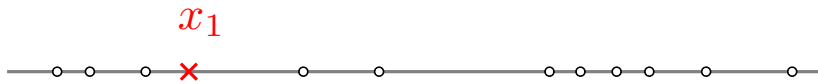
P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(\left|P \cap (-\infty, x]\right|, \left|P \cap [x, \infty)\right|\right)$

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

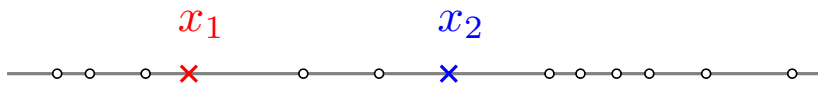
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(\left|P \cap (-\infty, x]\right|, \left|P \cap [x, \infty)\right|\right)$$

$$\text{prof}(x_1, P) = 3$$



P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(\left|P \cap (-\infty, x]\right|, \left|P \cap [x, \infty)\right|\right)$$

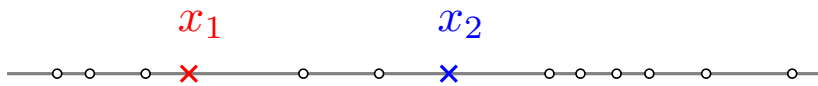


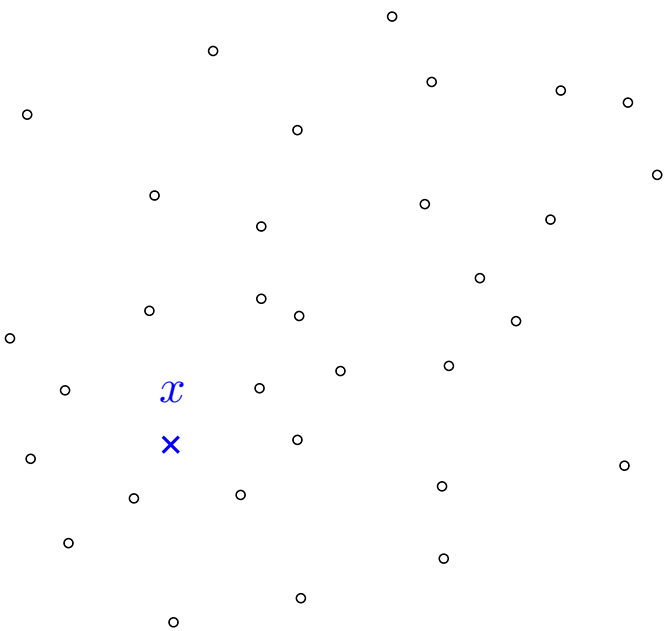
$\text{prof}(x_1, P) = 3$ $\quad$ $\text{prof}(x_2, P) = 5$

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(\left|P \cap (-\infty, x]\right|, \left|P \cap [x, \infty)\right|\right)$$

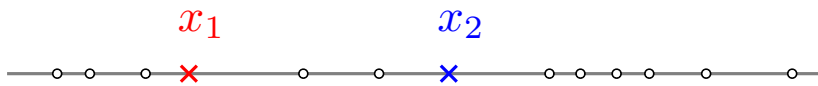
$$\text{prof}(x_1, P) = 3 \qquad \text{prof}(x_2, P) = 5$$



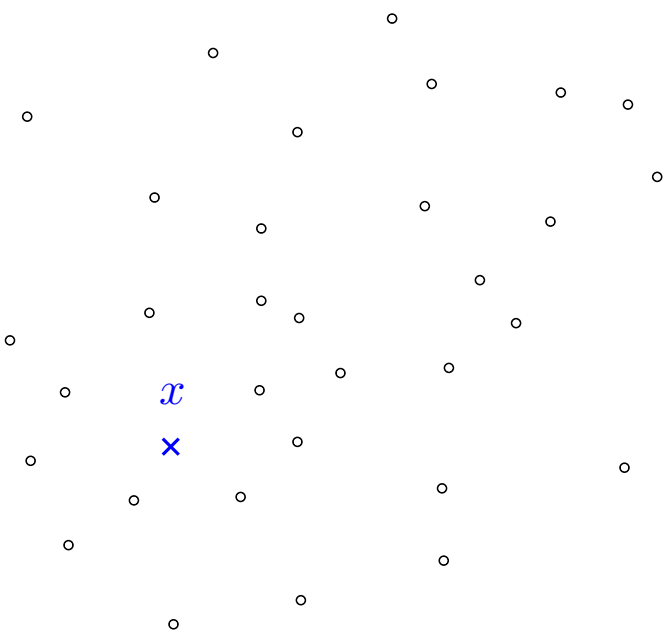


P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(|P \cap (-\infty, x]|, |P \cap [x, \infty)|\right)$



$\text{prof}(x_1, P) = 3 \qquad \text{prof}(x_2, P) = 5$



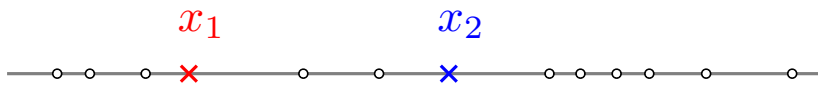
Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

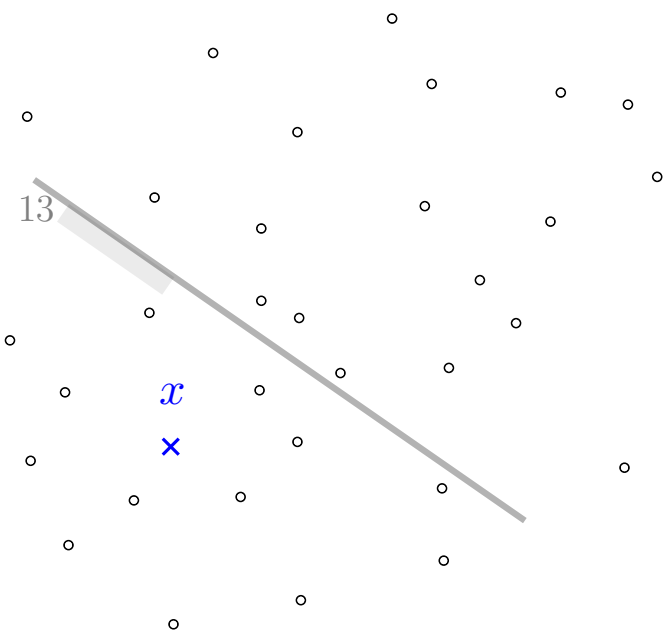
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} |h \cap P|.$

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(|P \cap (-\infty, x]|, |P \cap [x, \infty)|\right)$



$\text{prof}(x_1, P) = 3 \qquad \text{prof}(x_2, P) = 5$



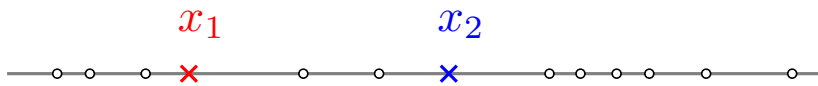
Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

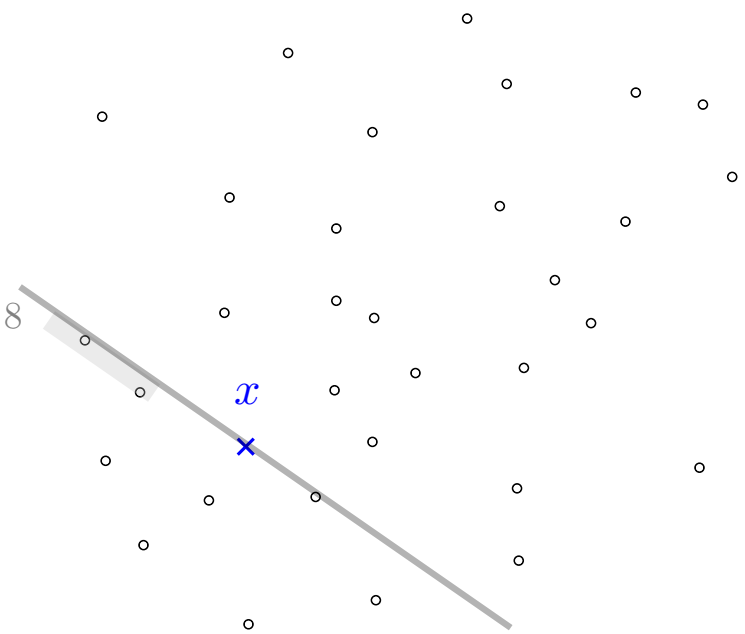
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} |h \cap P|.$

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(|P \cap (-\infty, x]|, |P \cap [x, \infty)|\right)$



$\text{prof}(x_1, P) = 3 \qquad \text{prof}(x_2, P) = 5$



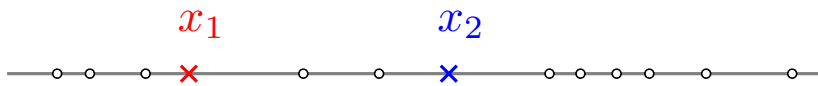
Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

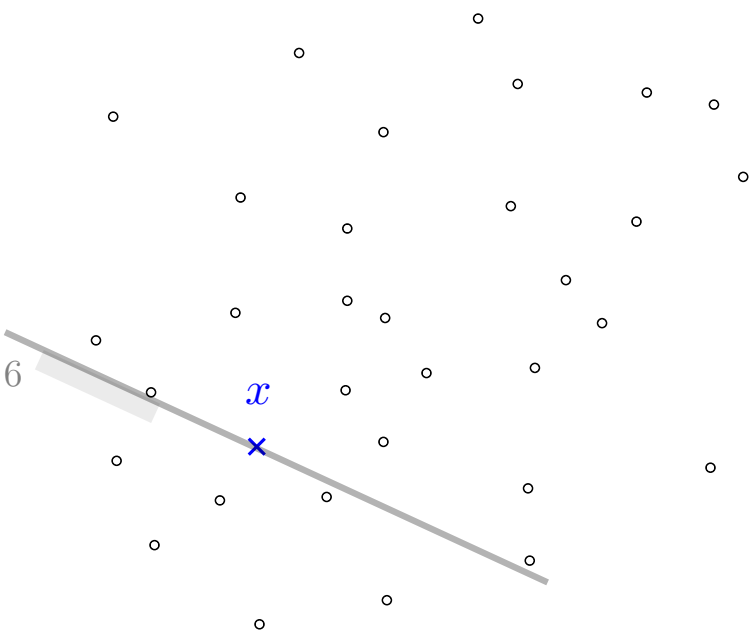
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} |h \cap P|.$

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(|P \cap (-\infty, x]|, |P \cap [x, \infty)|\right)$



$\text{prof}(x_1, P) = 3 \qquad \text{prof}(x_2, P) = 5$



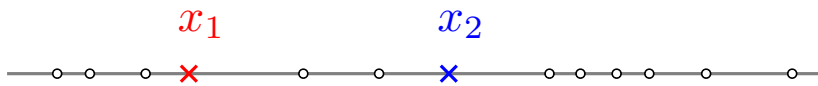
Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

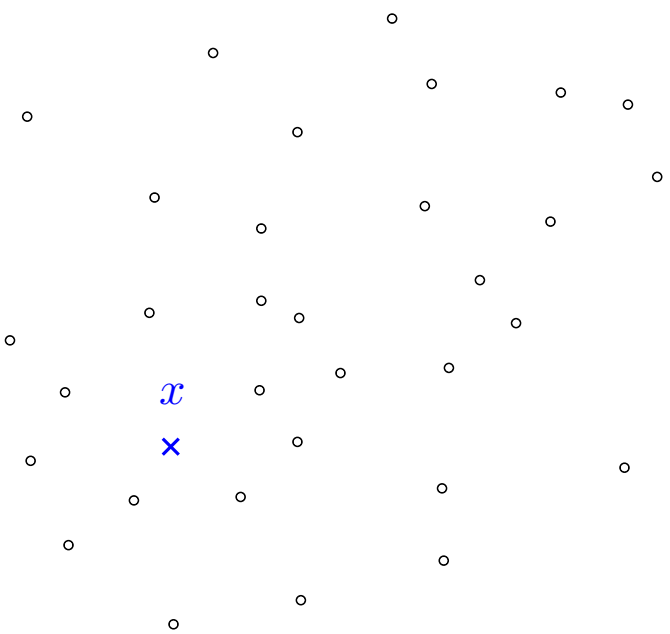
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} |h \cap P|.$

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(\left|P \cap (-\infty, x]\right|, \left|P \cap [x, \infty)\right|\right)$$



$\mathrm{prof}(x_1, P) = 3$ $\mathrm{prof}(x_2, P) = 5$



Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} |h \cap P|.$

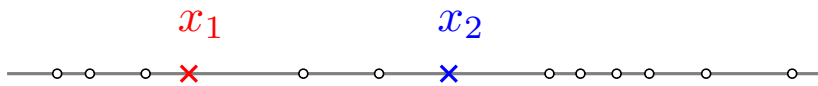
Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

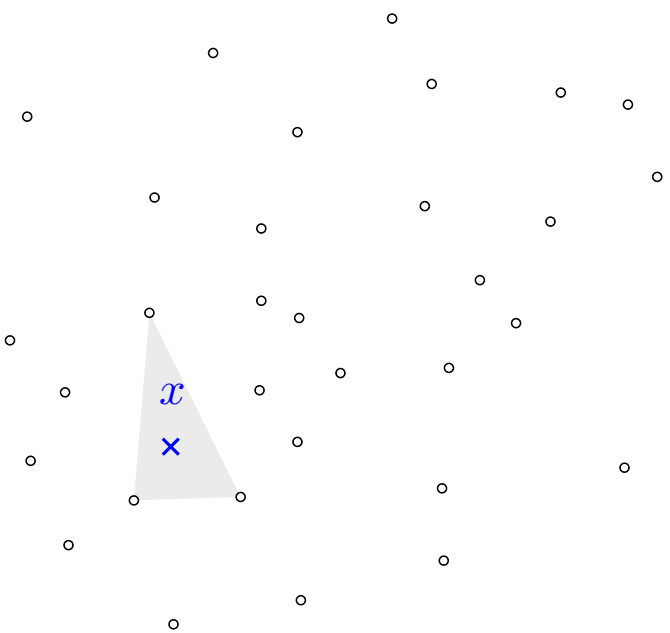
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(|P \cap (-\infty, x]|, |P \cap [x, \infty)|\right)$



$\text{prof}(x_1, P) = 3 \qquad \text{prof}(x_2, P) = 5$



1

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} |h \cap P|.$

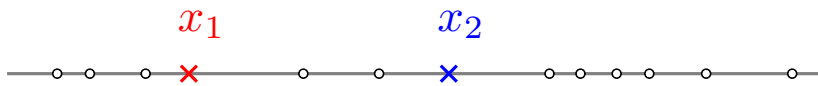
Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

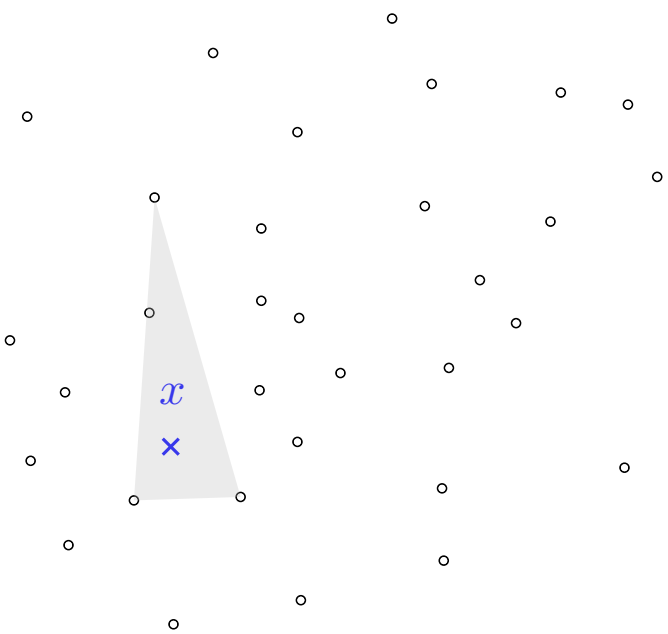
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(|P \cap (-\infty, x]|, |P \cap [x, \infty)|\right)$



$\text{prof}(x_1, P) = 3 \qquad \text{prof}(x_2, P) = 5$



2

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} |h \cap P|.$

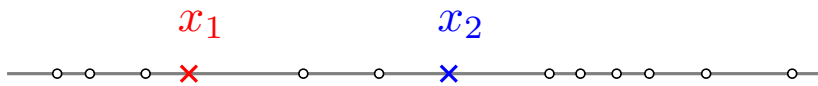
Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

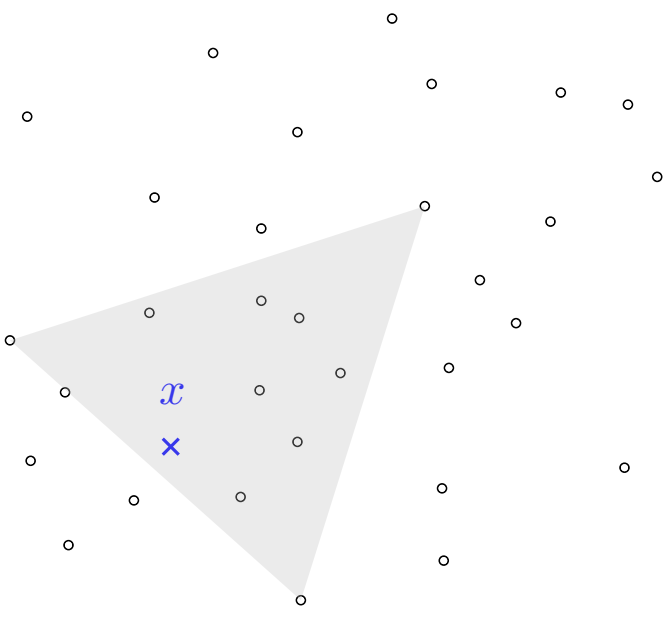
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(|P \cap (-\infty, x]|, |P \cap [x, \infty)|\right)$



$\text{prof}(x_1, P) = 3 \qquad \text{prof}(x_2, P) = 5$



3

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} |h \cap P|.$

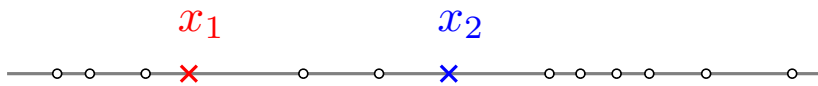
Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

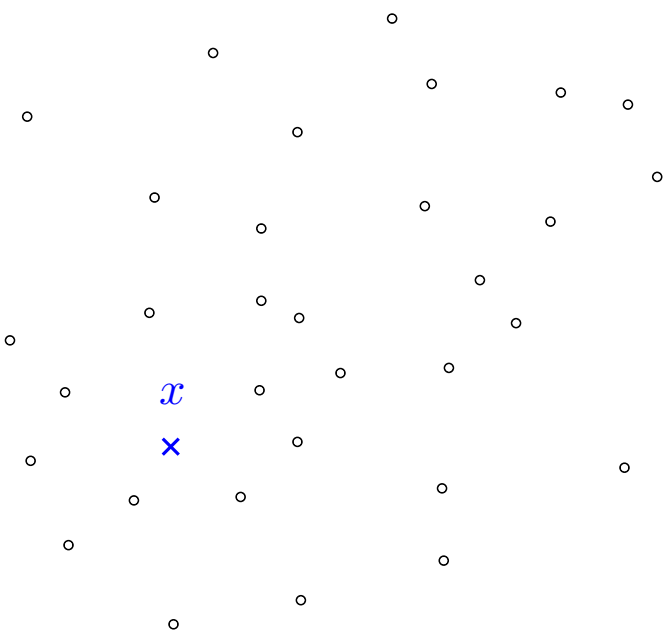
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(|P \cap (-\infty, x]|, |P \cap [x, \infty)|\right)$



$\text{prof}(x_1, P) = 3 \qquad \text{prof}(x_2, P) = 5$



Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} |h \cap P|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

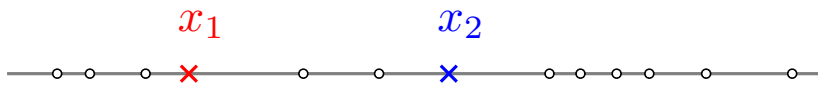
Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

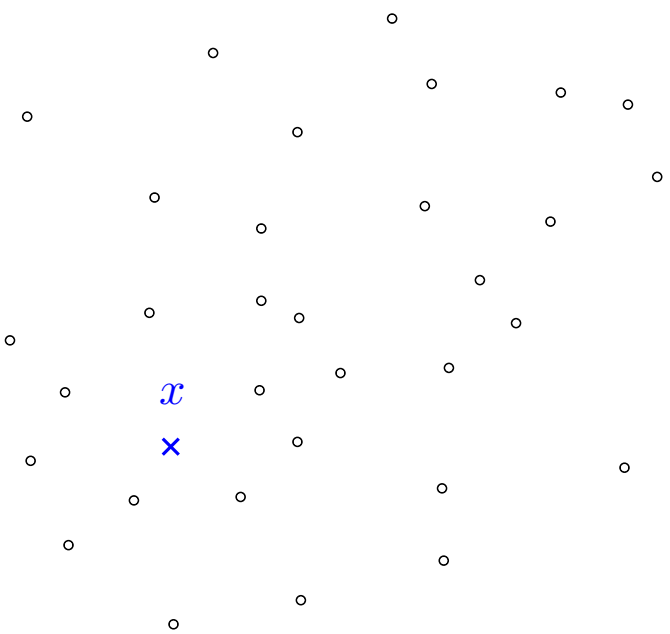
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(|P \cap (-\infty, x]|, |P \cap [x, \infty)|\right)$



$\text{prof}(x_1, P) = 3 \qquad \text{prof}(x_2, P) = 5$



Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} |h \cap P|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Profondeur simpliciale.

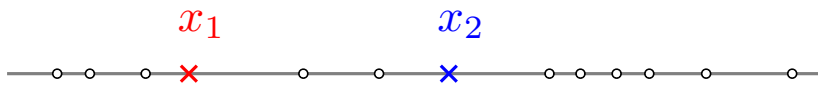
$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

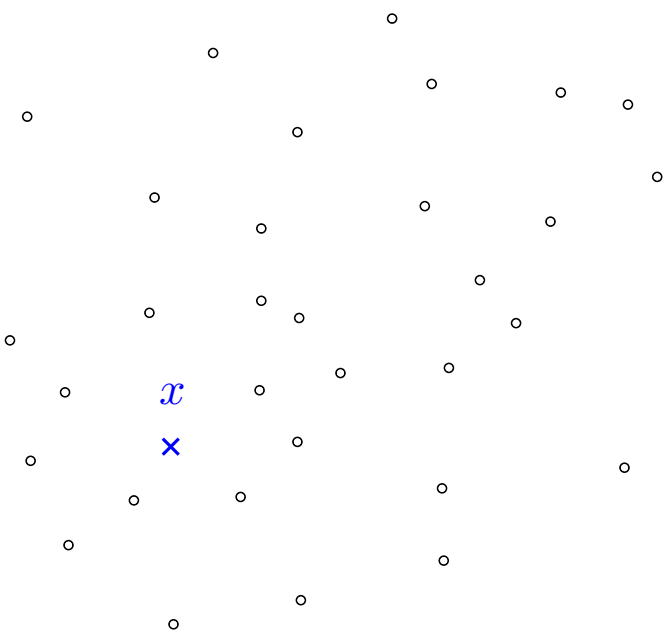
Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d \binom{|P|}{d+1}$.

P un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(|P \cap (-\infty, x]|, |P \cap [x, \infty)|\right)$



$\text{prof}(x_1, P) = 3 \qquad \text{prof}(x_2, P) = 5$



Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} |h \cap P|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d \binom{|P|}{d+1}$.

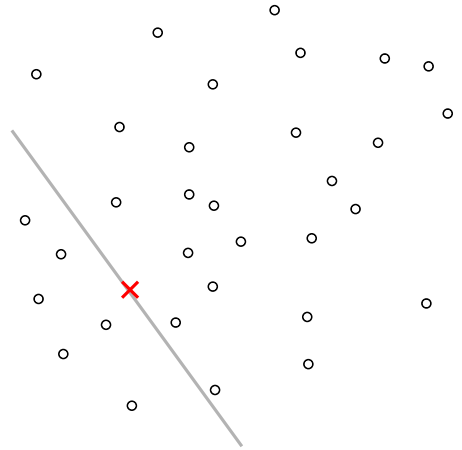
ne dépend que de d

$c_2 = 2/9$

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} \#h \cap P.$

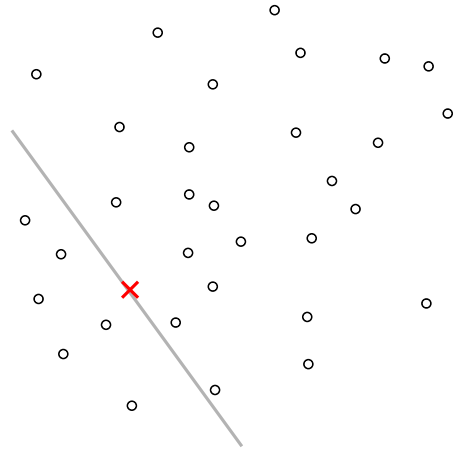


Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

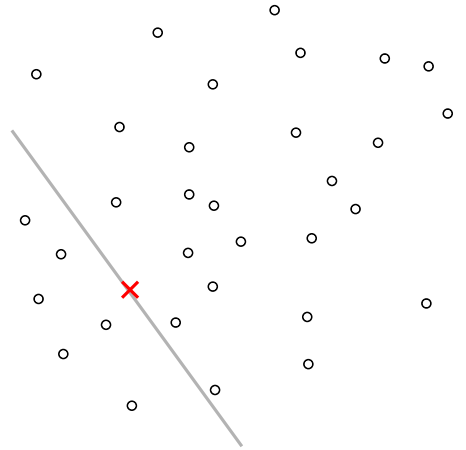
Idée

Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

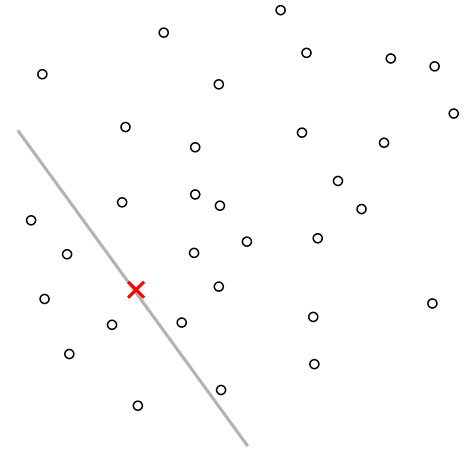
Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d :\, |h \cap P| < t} h \right)$$

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d \colon x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

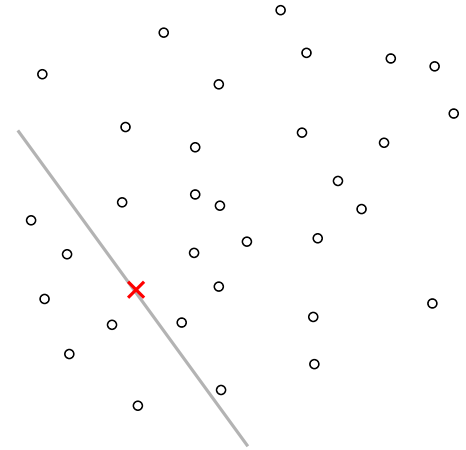
Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d \colon |h \cap P| < t} h \right) = \bigcap_{h' \in \mathcal{H}_d \colon |h' \cap P| > |P| - t} h'$$

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

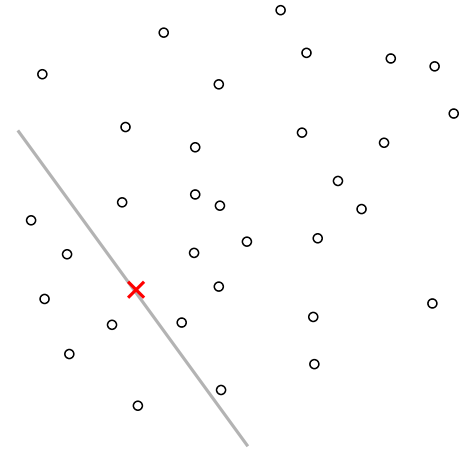
$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d :\, |h \cap P| < t} h \right) = \bigcap_{h' \in \mathcal{H}_d :\, |h' \cap P| > |P| - t} h'$$

intersection $\neq \emptyset$?

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d :\, |h \cap P| < t} h \right) = \bigcap_{h' \in \mathcal{H}_d :\, |h' \cap P| > |P| - t} h'$$

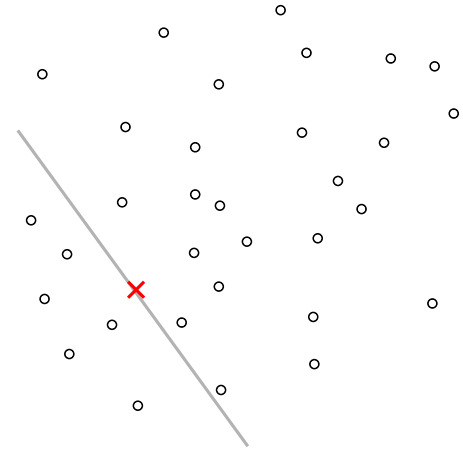
intersection $\neq \emptyset$?

Helly ?

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d \colon x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d \colon |h \cap P| < t} h \right) = \bigcap_{h' \in \mathcal{H}_d \colon |h' \cap P| > |P| - t} h'$$

intersection $\neq \emptyset$?

Helly ?

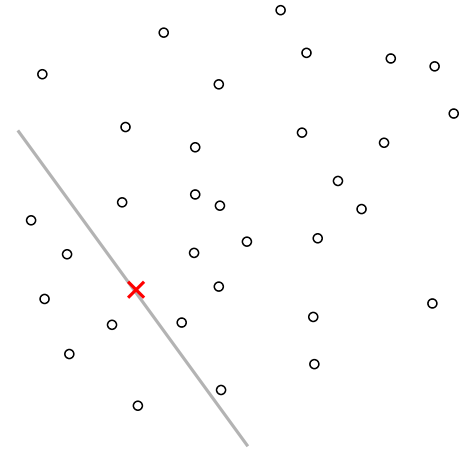
Preuve

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ les sous-ensembles de P de la forme $P \cap h$ avec $h \in \mathcal{H}_d$ et manquant $< \frac{|P|}{d+1}$ points de P.

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d :\, |h \cap P| < t} h \right) = \bigcap_{h' \in \mathcal{H}_d :\, |h' \cap P| > |P| - t} h'$$

intersection $\neq \emptyset$?

Helly ?

Preuve

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ les sous-ensembles de P de la forme $P \cap h$ avec $h \in \mathcal{H}_d$ et manquant $< \frac{|P|}{d+1}$ points de P.

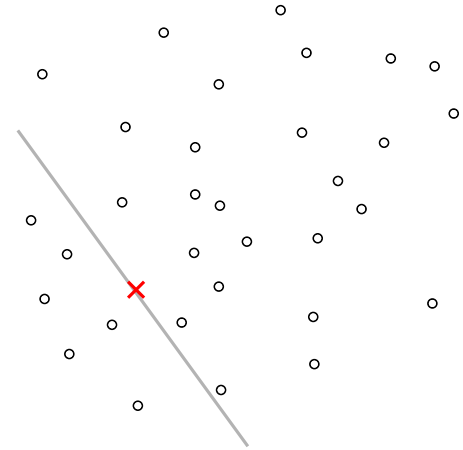
Pour tous $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{d+1} \leq k$, $\bigcap_{j=1}^{d+1} Q_{i_j} \neq \emptyset$.

← jeter $d+1$ fois $< \frac{1}{d+1}|P|$ ne suffit pas à vider P.

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d \colon x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d \colon |h \cap P| < t} h \right) = \bigcap_{h' \in \mathcal{H}_d \colon |h' \cap P| > |P| - t} h'$$

intersection $\neq \emptyset$?

Helly ?

Preuve

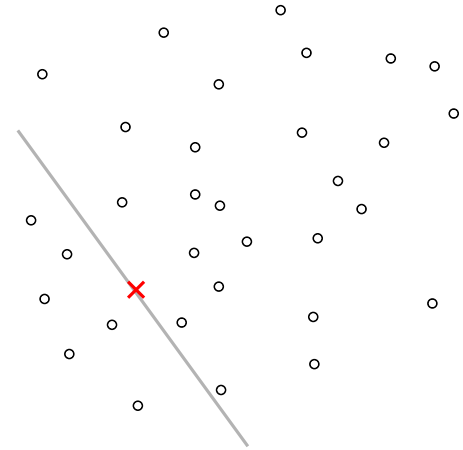
$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ les sous-ensembles de P de la forme $P \cap h$ avec $h \in \mathcal{H}_d$ et manquant $< \frac{|P|}{d+1}$ points de P.

Pour tous $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{d+1} \leq k$, $\quad \bigcap_{j=1}^{d+1} \text{conv}\left(Q_{i_j}\right) \neq \emptyset.$

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d \colon x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d \colon |h \cap P| < t} h \right) = \bigcap_{h' \in \mathcal{H}_d \colon |h' \cap P| > |P| - t} h'$$

intersection $\neq \emptyset$?

Helly ?

Preuve

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ les sous-ensembles de P de la forme $P \cap h$ avec $h \in \mathcal{H}_d$ et manquant $< \frac{|P|}{d+1}$ points de P.

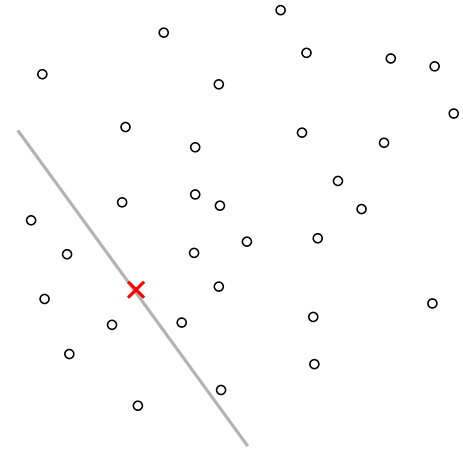
Pour tous $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{d+1} \leq k$, $\bigcap_{j=1}^{d+1} \text{conv}\left(Q_{i_j}\right) \neq \emptyset$.

$\exists x \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{conv}(Q_i)$ par **Helly**.

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d :\, |h \cap P| < t} h \right) = \bigcap_{h' \in \mathcal{H}_d :\, |h' \cap P| > |P| - t} h'$$

intersection $\neq \emptyset$?

Helly ?

Preuve

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ les sous-ensembles de P de la forme $P \cap h$ avec $h \in \mathcal{H}_d$ et manquant $< \frac{|P|}{d+1}$ points de P.

Pour tous $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{d+1} \leq k$, $\quad \bigcap_{j=1}^{d+1} \text{conv}\left(Q_{i_j}\right) \neq \emptyset$.

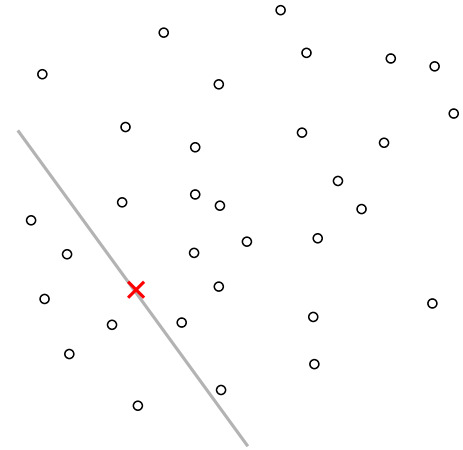
$\exists x \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{conv}(Q_i)$ par **Helly**.

$\forall h \in \mathcal{H}_d, \quad |h \cap P| < \frac{|P|}{d+1}$

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d :\, |h \cap P| < t} h \right) = \bigcap_{h' \in \mathcal{H}_d :\, |h' \cap P| > |P| - t} h'$$

intersection $\neq \emptyset$?

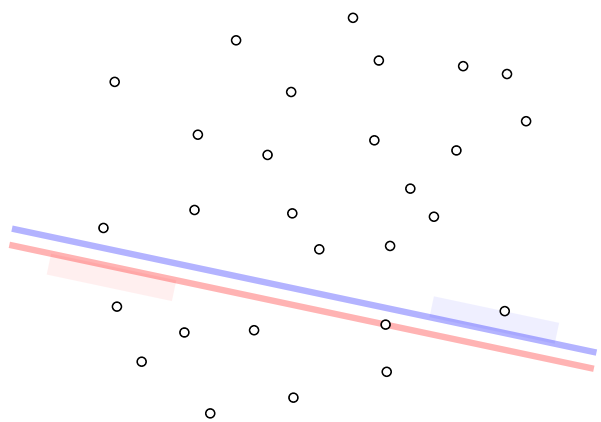
Helly ?

Preuve

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ les sous-ensembles de P de la forme $P \cap h$ avec $h \in \mathcal{H}_d$ et manquant $< \frac{|P|}{d+1}$ points de P.

Pour tous $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{d+1} \leq k$, $\quad \bigcap_{j=1}^{d+1} \text{conv}\left(Q_{i_j}\right) \neq \emptyset$.

$\exists x \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{conv}(Q_i)$ par **Helly**.

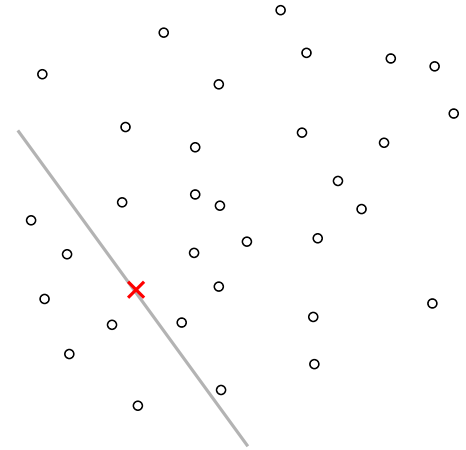


$\forall h \in \mathcal{H}_d, \quad |h \cap P| < \frac{|P|}{d+1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R}^d \setminus h$ contient un Q_i

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d :\, |h \cap P| < t} h \right) = \bigcap_{h' \in \mathcal{H}_d :\, |h' \cap P| > |P| - t} h'$$

intersection $\neq \emptyset$?

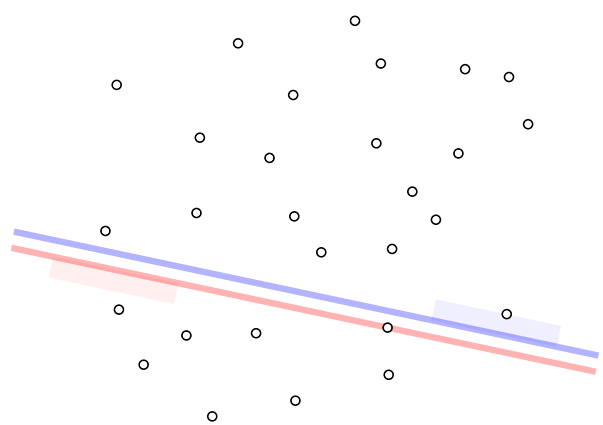
Helly ?

Preuve

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ les sous-ensembles de P de la forme $P \cap h$ avec $h \in \mathcal{H}_d$ et manquant $< \frac{|P|}{d+1}$ points de P.

Pour tous $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{d+1} \leq k$, $\quad \bigcap_{j=1}^{d+1} \text{conv}\left(Q_{i_j}\right) \neq \emptyset$.

$\exists x \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{conv}(Q_i)$ par **Helly**.



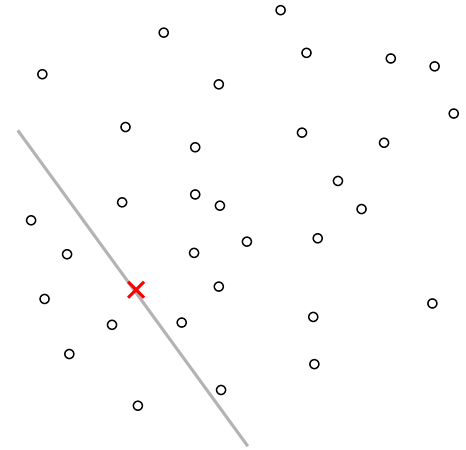
$$\forall h \in \mathcal{H}_d, \quad |h \cap P| < \frac{|P|}{d+1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R}^d \setminus h \text{ contient un } Q_i$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^d \setminus h \text{ contient } x$$

Profondeur de demi-espaces.

$\mathcal{H}_d$ l'ensemble des demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^d$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{h \in \mathcal{H}_d :\, x \in h} \#h \cap P.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{d+1}$.

Idée

Enlevons de $\mathbb{R}^d$ tous les points de profondeur $< t$. Il reste...

$$C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_d :\, |h \cap P| < t} h \right) = \bigcap_{h' \in \mathcal{H}_d :\, |h' \cap P| > |P| - t} h'$$

intersection $\neq \emptyset$?

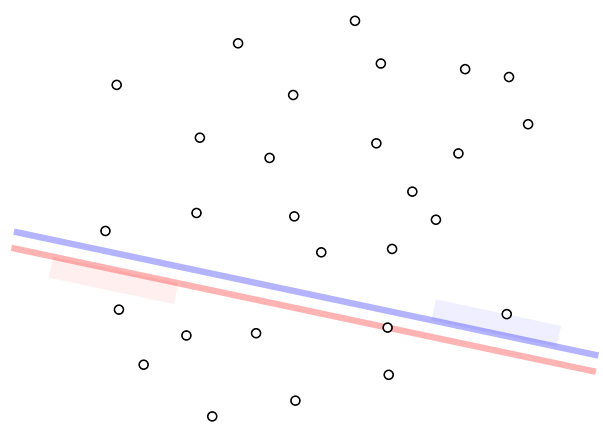
Helly ?

Preuve

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ les sous-ensembles de P de la forme $P \cap h$ avec $h \in \mathcal{H}_d$ et manquant $< \frac{|P|}{d+1}$ points de P.

Pour tous $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{d+1} \leq k$, $\quad \bigcap_{j=1}^{d+1} \text{conv}\left(Q_{i_j}\right) \neq \emptyset$.

$\exists x \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{conv}(Q_i)$ par **Helly**.



$$\forall h \in \mathcal{H}_d, \quad |h \cap P| < \frac{|P|}{d+1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R}^d \setminus h \text{ contient un } Q_i$$

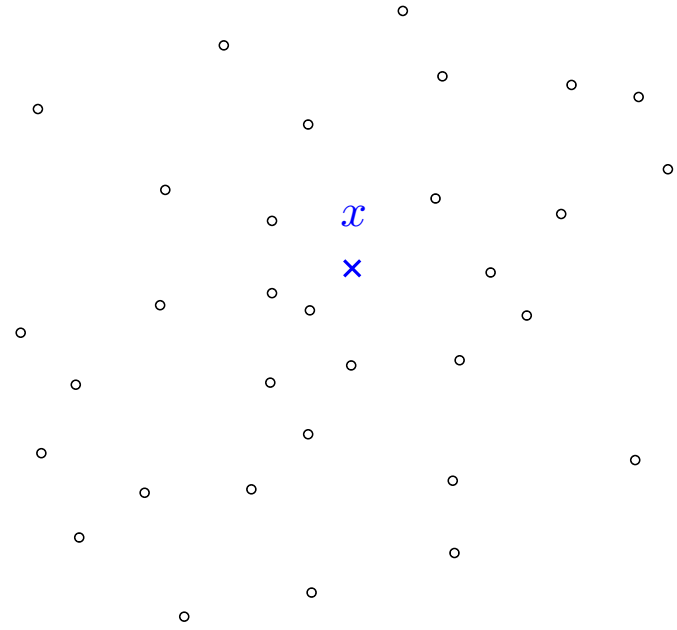
$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^d \setminus h \text{ contient } x \qquad \square$$

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d \binom{|P|}{d+1}$.



Un point x dans $\text{conv}(P)$.

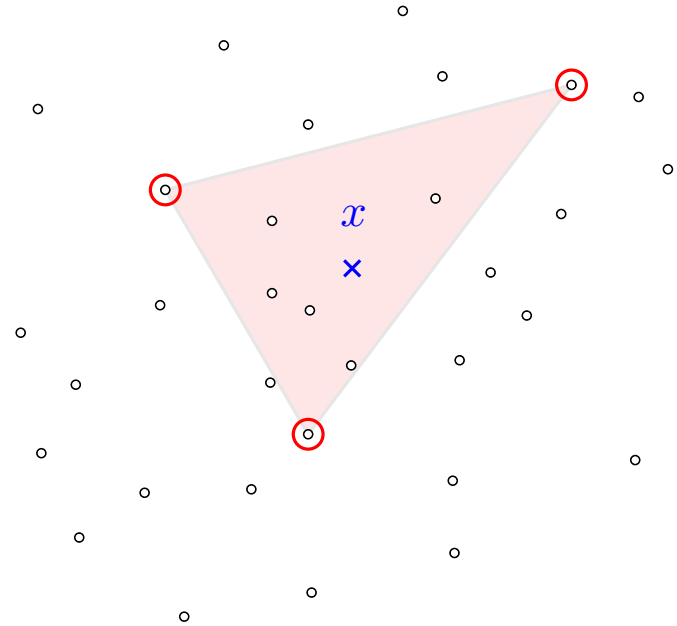
Preuve

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \overset{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d \binom{|P|}{d+1}$.



Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

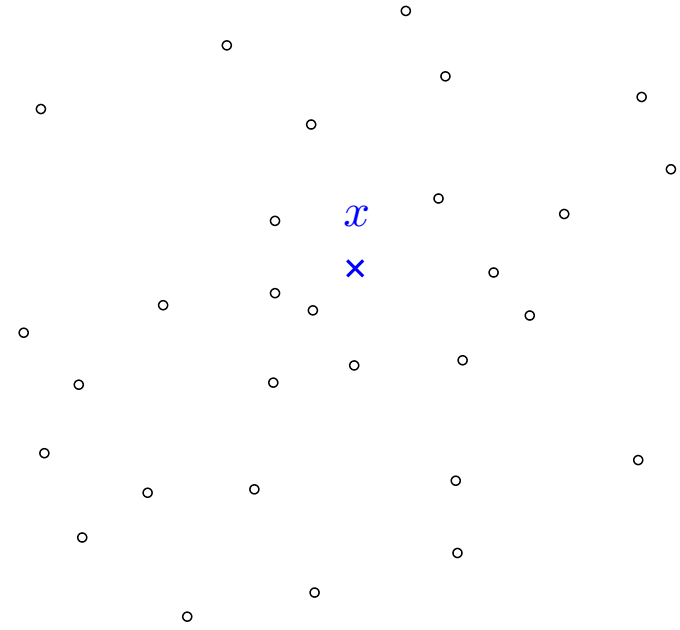
$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d \binom{|P|}{d+1}$.



Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

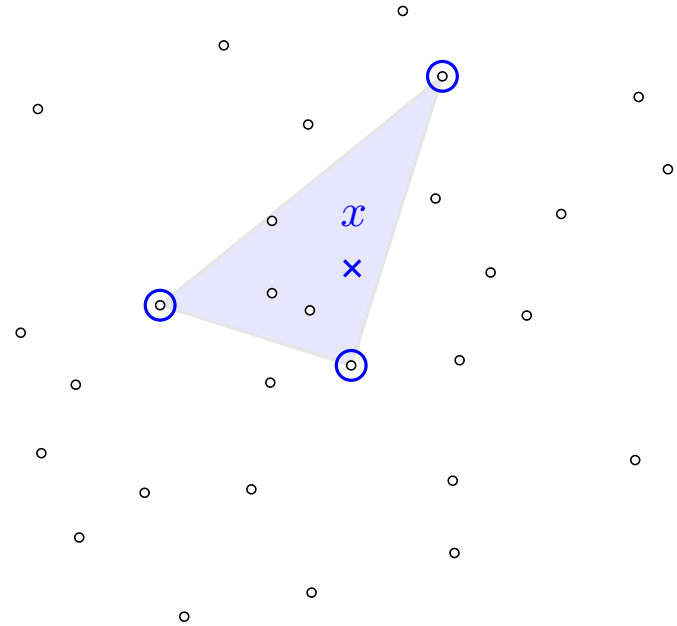
$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $V(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=}$ sommets de...

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d\binom{|P|}{d+1}$.

Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

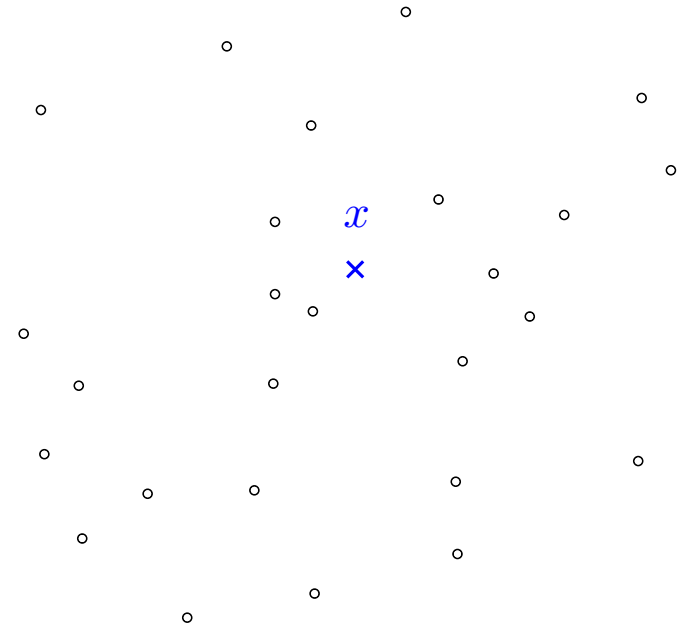
$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $V(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=}$ sommets de...

On construit σ_2,

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d\binom{|P|}{d+1}$.

Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

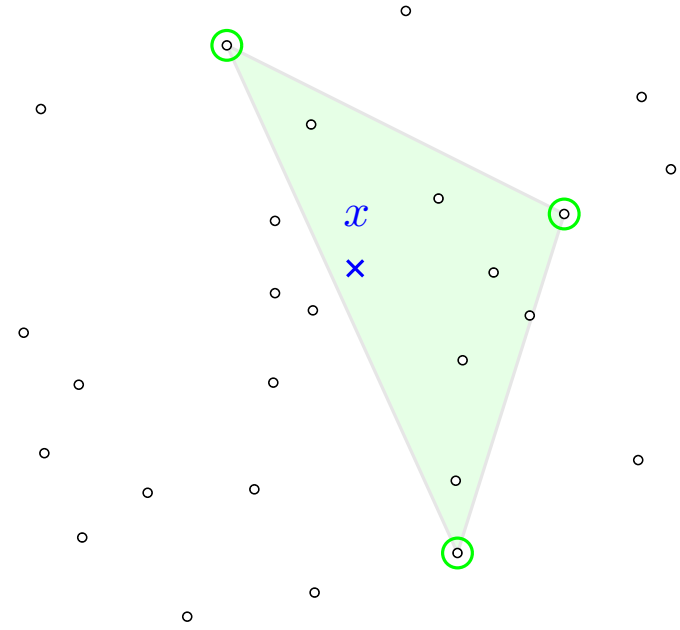
$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $V(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=}$ sommets de...

On construit $\sigma_2, P_3,$

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \overset{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d\binom{|P|}{d+1}$.

Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

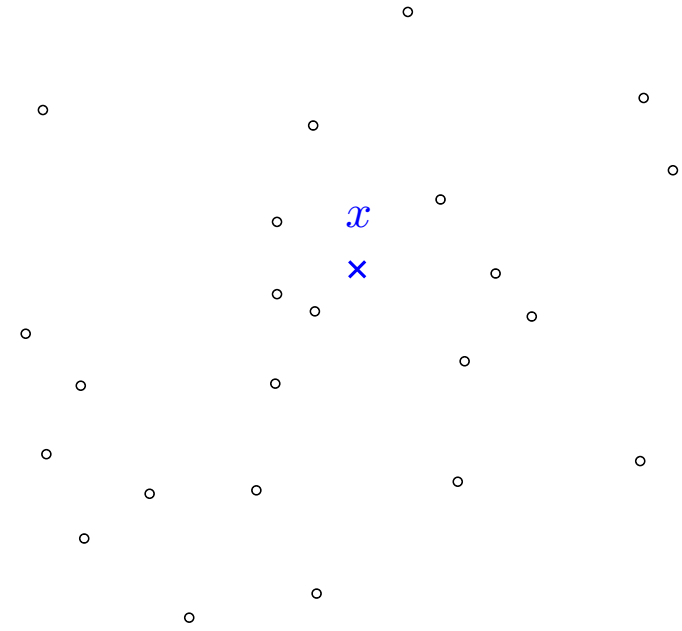
$P_2 \overset{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $V(\cdot) \overset{\text{def}}{=}$ sommets de...

On construit $\sigma_2, P_3, \sigma_3,$

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d\binom{|P|}{d+1}$.

Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $V(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=}$ sommets de...

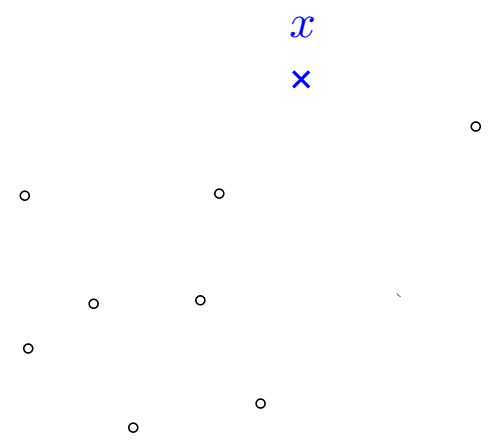
On construit $\sigma_2, P_3, \sigma_3, P_4,$

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d \binom{|P|}{d+1}$.



Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

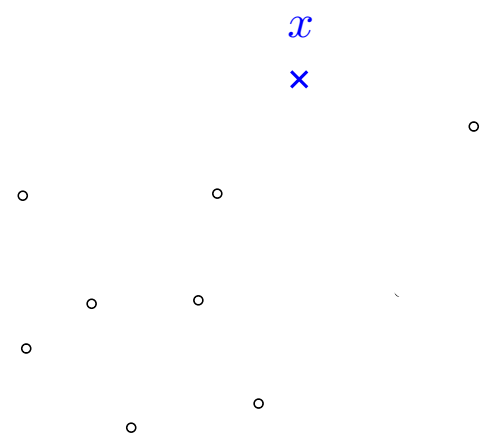
$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $V(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=}$ sommets de...

On construit $\sigma_2, P_3, \sigma_3, P_4, \ldots$ et on s'arrête quand $x \notin \text{conv}(P_{k+1})$.

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d\binom{|P|}{d+1}$.

Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

$k \geq ???$

$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $\quad V(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=}$ sommets de...

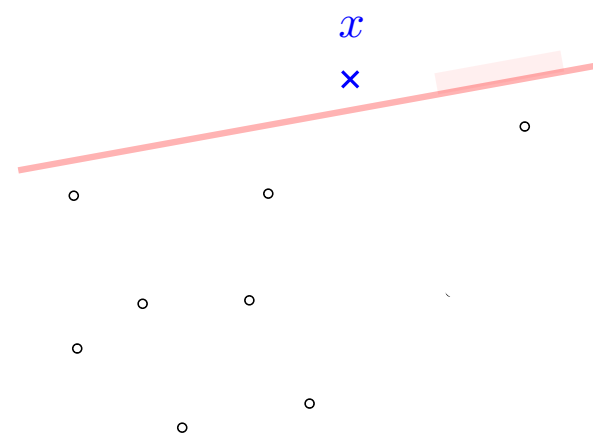
On construit $\sigma_2, P_3, \sigma_3, P_4, \ldots$ et on s'arrête quand $x \notin \text{conv}(P_{k+1})$.

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d\binom{|P|}{d+1}$.



Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

$k \geq ???$

$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $\quad V(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=}$ sommets de...

Hyperplan H séparant strictement x et $\text{conv}(P_{k+1})$.

D demi-espace fermé contenant x bordé par H.

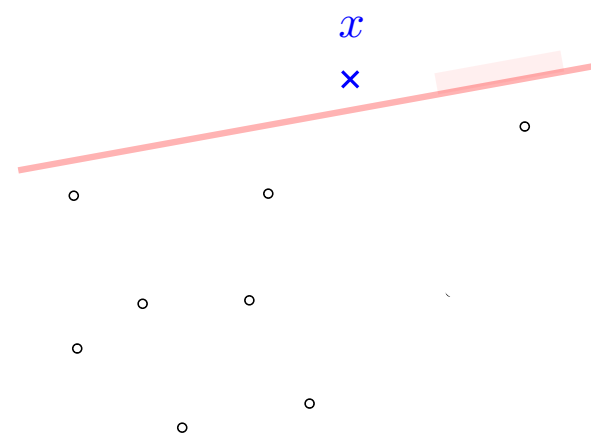
On construit $\sigma_2, P_3, \sigma_3, P_4, \ldots$ et on s'arrête quand $x \notin \text{conv}(P_{k+1})$.

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \overset{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d\binom{|P|}{d+1}$.



Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

$k \geq ???$

$P_2 \overset{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $\quad V(\cdot) \overset{\text{def}}{=}$ sommets de...

Hyperplan H séparant strictement x et $\text{conv}(P_{k+1})$.

D demi-espace fermé contenant x bordé par H.

On construit $\sigma_2, P_3, \sigma_3, P_4, \ldots$ et on s'arrête quand $x \notin \text{conv}(P_{k+1})$.

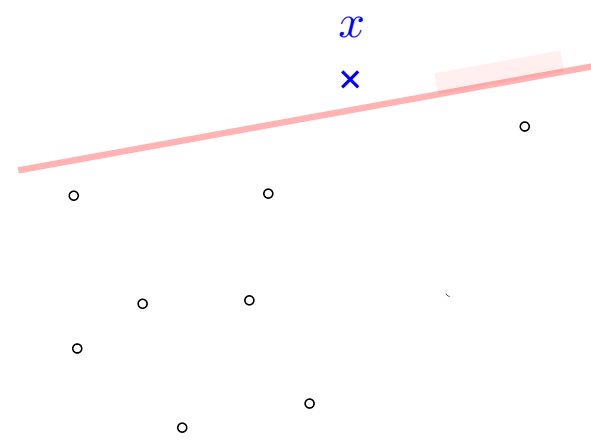
$$\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \leq |D \cap P|$$

$D \ni x$

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$



Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d\binom{|P|}{d+1}$.

Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

$k \geq ???$

$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $\quad V(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=}$ sommets de...

Hyperplan H séparant strictement x et $\text{conv}(P_{k+1})$.

D demi-espace fermé contenant x bordé par H.

On construit $\sigma_2, P_3, \sigma_3, P_4, \ldots$ et on s'arrête quand $x \notin \text{conv}(P_{k+1})$.

$$\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \leq |D \cap P| \leq \sum_{i=1}^{k} |V(\sigma_i)|$$

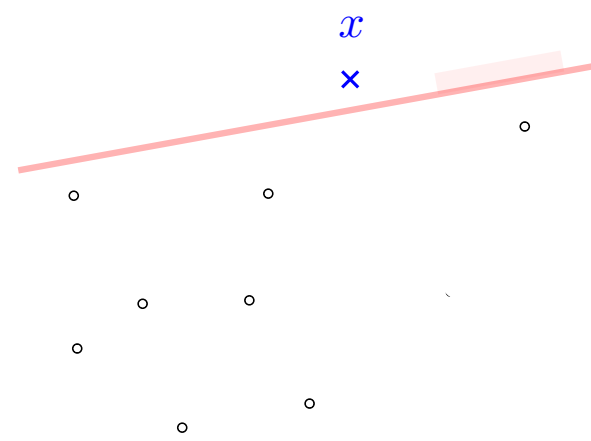
$D \ni x$ $\qquad$ $D \cap P_{k+1} = \emptyset$

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d\binom{|P|}{d+1}$.



Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $\quad V(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=}$ sommets de...

On construit $\sigma_2, P_3, \sigma_3, P_4, \ldots$ et on s'arrête quand $x \notin \text{conv}(P_{k+1})$.

$k \geq \frac{1}{d+1} \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P)$

Hyperplan H séparant strictement x et $\text{conv}(P_{k+1})$.

D demi-espace fermé contenant x bordé par H.

$$\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \leq |D \cap P| \leq \sum_{i=1}^{k} |V(\sigma_i)|$$

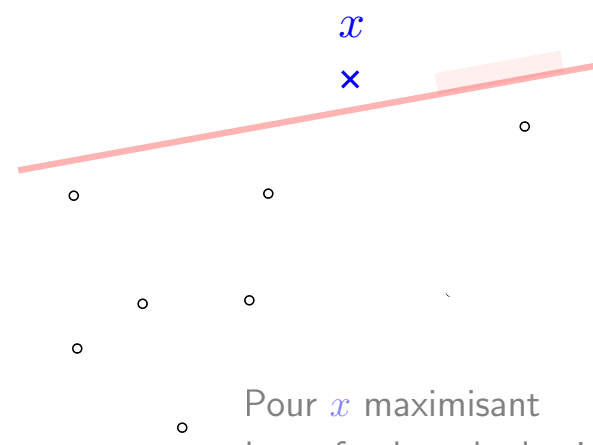
$D \ni x$ $\qquad$ $D \cap P_{k+1} = \emptyset$

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{prof}_S(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\mathrm{prof}_S(x, P) \geq c_d \binom{|P|}{d+1}$.



Pour x maximisant
la profondeur de demi-espace

$$k \geq \frac{1}{d+1} \mathrm{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{(d+1)^2}.$$

Preuve

Un point x dans $\mathrm{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $\quad V(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=}$ sommets de...

Hyperplan H séparant strictement x et $\mathrm{conv}(P_{k+1})$.
D demi-espace fermé contenant x bordé par H.

On construit $\sigma_2, P_3, \sigma_3, P_4, \ldots$ et on s'arrête quand $x \notin \mathrm{conv}(P_{k+1})$.

$$\mathrm{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \leq |D \cap P| \leq \sum_{i=1}^{k} |V(\sigma_i)|$$

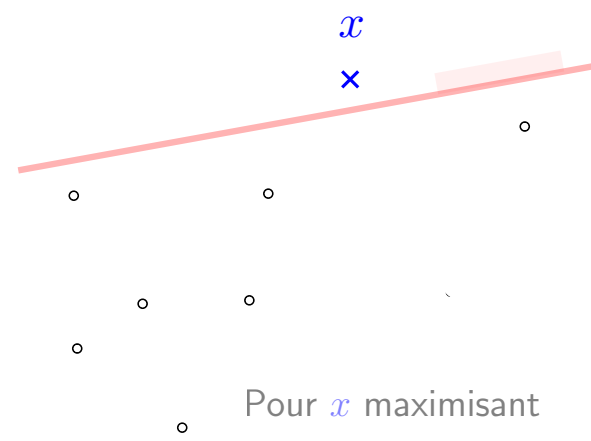
$D \ni x$ $\qquad$ $D \cap P_{k+1} = \emptyset$

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x,P) \overset{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x,P) \geq c_d\binom{|P|}{d+1}$.



Pour x maximisant
la profondeur de demi-espace

$$k \geq \frac{1}{d+1}\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x,P) \geq \frac{|P|}{(d+1)^2}.$$

Hyperplan H séparant strictement x et $\text{conv}(P_{k+1})$.
D demi-espace fermé contenant x bordé par H.

$$\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x,P) \leq |D \cap P| \leq \sum_{i=1}^{k} |V(\sigma_i)|$$

$D \ni x$ $\qquad$ $D \cap P_{k+1} = \emptyset$

Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

$P_2 \overset{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $\qquad$ $V(\cdot) \overset{\text{def}}{=}$ sommets de...

On construit $\sigma_2, P_3, \sigma_3, P_4, \ldots$ et on s'arrête quand $x \notin \text{conv}(P_{k+1})$.

Et la, on multiplie les simplexes...

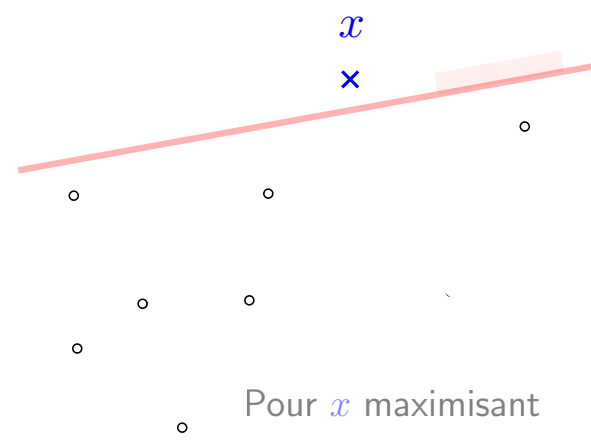
n simplexes d'ensembles de sommets disjoints
$\rightarrow \binom{n}{d+1}$ simplexes d'ensembles de sommets distincts.

Profondeur simpliciale.

$S(P)$ l'ensemble des simplexes à sommets dans P.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{prof}_S(x, P) \overset{\text{def}}{=} |\{\sigma \in S : x \in \sigma\}|.$

Théorème. $\forall P, \exists x$ tel que $\text{prof}_S(x, P) \geq c_d \binom{|P|}{d+1}$.



Pour x maximisant
la profondeur de demi-espace

$$k \geq \frac{1}{d+1} \text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \geq \frac{|P|}{(d+1)^2}.$$

Preuve

Un point x dans $\text{conv}(P)$.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \in S(P)$ contenant x. ← Carathéodory

$P_2 \overset{\text{def}}{=} P \setminus V(\sigma_1)$ $\quad V(\cdot) \overset{\text{def}}{=}$ sommets de...

Hyperplan H séparant strictement x et $\text{conv}(P_{k+1})$.
D demi-espace fermé contenant x bordé par H.

$$\text{prof}_{\mathcal{H}_d}(x, P) \leq |D \cap P| \leq \sum_{i=1}^{k} |V(\sigma_i)|$$

$D \ni x$ $\qquad$ $D \cap P_{k+1} = \emptyset$

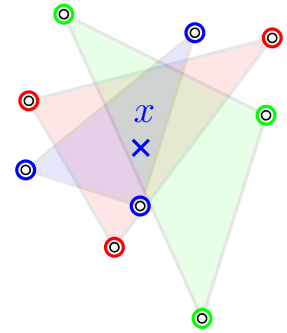
On construit $\sigma_2, P_3, \sigma_3, P_4, \ldots$ et on s'arrête quand $x \notin \text{conv}(P_{k+1})$.

Et la, on multiplie les simplexes...

n simplexes d'ensembles de sommets disjoints
$\rightarrow \binom{n}{d+1}$ simplexes d'ensembles de sommets distincts.

multiplier les simplexes ? ? ?

Carathéodory coloré. Pour tous sous-ensembles finis $E_1, E_2, \ldots, E_{d+1}$ de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \bigcap_{i=1}^{d+1} \mathrm{conv}(E_i)$, il existe $\{p_i \in E_i\}$ tels que $x \in \mathrm{conv}\left(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\}\right)$.

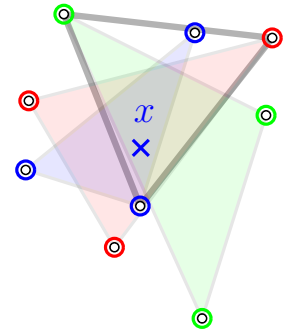


$E_1 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

$E_2 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

$E_3 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

Carathéodory coloré. Pour tous sous-ensembles finis $E_1, E_2, \ldots, E_{d+1}$ de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \bigcap_{i=1}^{d+1} \mathrm{conv}(E_i)$, il existe $\{p_i \in E_i\}$ tels que $x \in \mathrm{conv}\left(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\}\right)$.

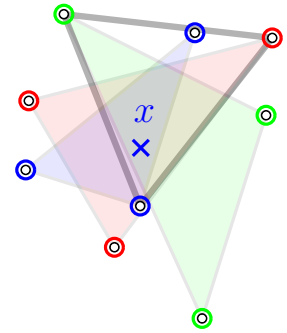


$E_1 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

$E_2 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

$E_3 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

Carathéodory coloré. Pour tous sous-ensembles finis $E_1, E_2, \ldots, E_{d+1}$ de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \bigcap_{i=1}^{d+1} \mathrm{conv}(E_i)$, il existe $\{p_i \in E_i\}$ tels que $x \in \mathrm{conv}\left(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\}\right)$.



$E_1 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

$E_2 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

$E_3 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

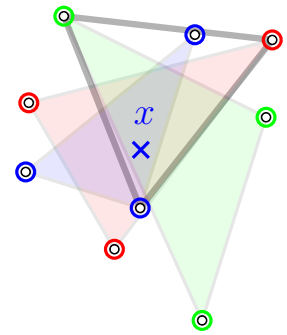
Usage

Simplexes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ contenant x et ne partageant pas de sommets.

$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{d+1} \leq k$, appliquer **C. col.** avec $E_j \overset{\text{def}}{=} V(\sigma_{i_j})$

$\rightsquigarrow$ nouveau simplexe contenant x.

Carathéodory coloré. Pour tous sous-ensembles finis $E_1, E_2, \ldots, E_{d+1}$ de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \bigcap_{i=1}^{d+1} \mathrm{conv}(E_i)$, il existe $\{p_i \in E_i\}$ tels que $x \in \mathrm{conv}\left(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\}\right)$.



$E_1 = \{$ ○, ○, ○ $\}$
$E_2 = \{$ ○, ○, ○ $\}$
$E_3 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

Usage

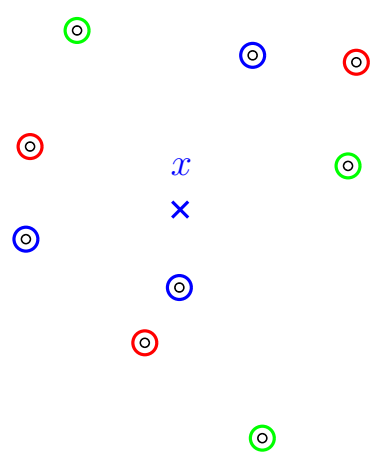
Simplexes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ contenant x et ne partageant pas de sommets.

$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{d+1} \leq k$, appliquer **C. col.** avec $E_j \overset{\text{def}}{=} V(\sigma_{i_j})$

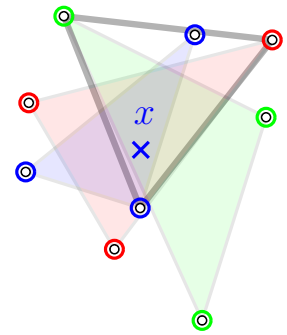
$\rightsquigarrow$ nouveau simplexe contenant x.

Preuve

$$A = \text{les ensembles arc-en-ciel} \overset{\text{def}}{=} \left\{ G \subset \bigcup_{i=1}^{d+1} E_i \quad : \quad \forall i, \quad |G \cap E_i| = 1 \right\}.$$



Carathéodory coloré. Pour tous sous-ensembles finis $E_1, E_2, \ldots, E_{d+1}$ de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \bigcap_{i=1}^{d+1} \operatorname{conv}(E_i)$, il existe $\{p_i \in E_i\}$ tels que $x \in \operatorname{conv}(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\})$.



$E_1 = \{$ ○, ○, ○ $\}$
$E_2 = \{$ ○, ○, ○ $\}$
$E_3 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

Usage

Simplexes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ contenant x et ne partageant pas de sommets.

$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{d+1} \leq k$, appliquer **C. col.** avec $E_j \overset{\text{def}}{=} V(\sigma_{i_j})$

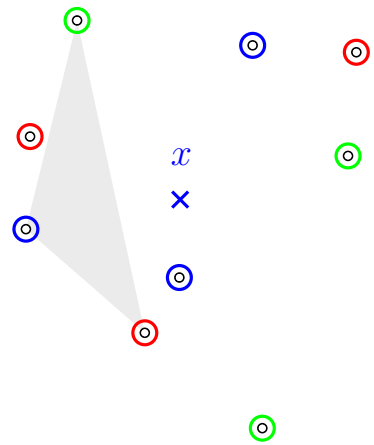
$\rightsquigarrow$ nouveau simplexe contenant x.

Preuve

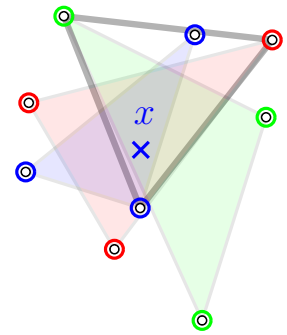
$$A = \text{les ensembles arc-en-ciel} \overset{\text{def}}{=} \left\{ G \subset \bigcup_{i=1}^{d+1} E_i \quad : \quad \forall i, \quad |G \cap E_i| = 1 \right\}.$$

$G_1 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{argmin}_{G \in A} \operatorname{dist}_{\|\cdot\|_2}(\operatorname{conv}(G), x)$.

Si $x \notin \operatorname{conv}(G_1)$,



Carathéodory coloré. Pour tous sous-ensembles finis $E_1, E_2, \ldots, E_{d+1}$ de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \bigcap_{i=1}^{d+1} \operatorname{conv}(E_i)$, il existe $\{p_i \in E_i\}$ tels que $x \in \operatorname{conv}(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\})$.



$E_1 = \{$ ○, ○, ○ $\}$
$E_2 = \{$ ○, ○, ○ $\}$
$E_3 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

Usage

Simplexes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ contenant x et ne partageant pas de sommets.

$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{d+1} \leq k$, appliquer **C. col.** avec $E_j \overset{\text{def}}{=} V(\sigma_{i_j})$

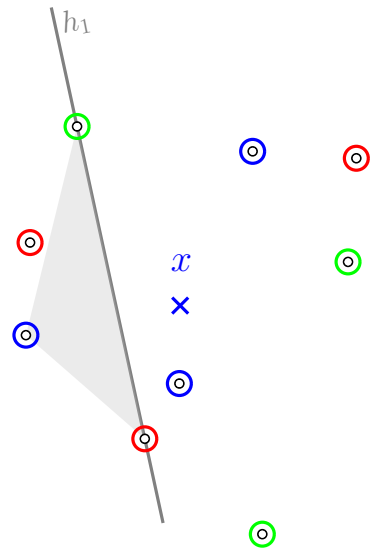
$\rightsquigarrow$ nouveau simplexe contenant x.

Preuve

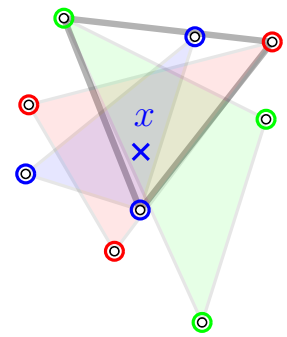
$$A = \text{les ensembles arc-en-ciel} \overset{\text{def}}{=} \left\{ G \subset \bigcup_{i=1}^{d+1} E_i \quad : \quad \forall i, \quad |G \cap E_i| = 1 \right\}.$$

$G_1 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{argmin}_{G \in A} \operatorname{dist}_{\|\cdot\|_2}(\operatorname{conv}(G), x)$.

Si $x \notin \operatorname{conv}(G_1)$, on peut améliorer G_1,



Carathéodory coloré. Pour tous sous-ensembles finis $E_1, E_2, \ldots, E_{d+1}$ de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \bigcap_{i=1}^{d+1} \operatorname{conv}(E_i)$, il existe $\{p_i \in E_i\}$ tels que $x \in \operatorname{conv}(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\})$.



$E_1 = \{$ ○, ○, ○ $\}$
$E_2 = \{$ ○, ○, ○ $\}$
$E_3 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

Usage

Simplexes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ contenant x et ne partageant pas de sommets.

$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{d+1} \leq k$, appliquer **C. col.** avec $E_j \overset{\text{def}}{=} V(\sigma_{i_j})$

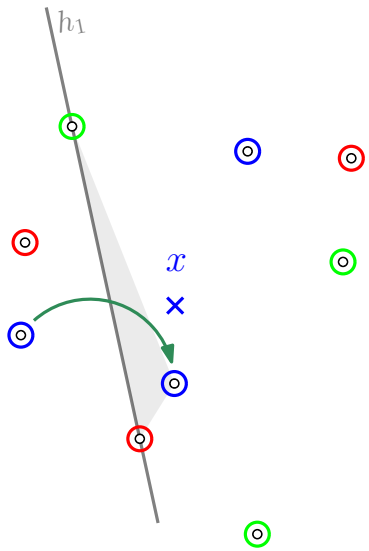
$\rightsquigarrow$ nouveau simplexe contenant x.

Preuve

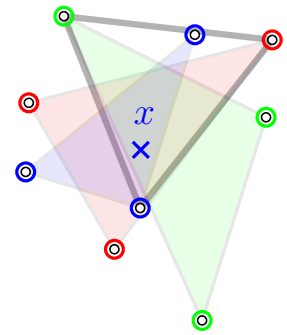
$$A = \text{les ensembles arc-en-ciel} \overset{\text{def}}{=} \left\{ G \subset \bigcup_{i=1}^{d+1} E_i \quad : \quad \forall i, \quad |G \cap E_i| = 1 \right\}.$$

$G_1 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{argmin}_{G \in A} \operatorname{dist}_{\|\cdot\|_2}(\operatorname{conv}(G), x)$.

Si $x \notin \operatorname{conv}(G_1)$, on peut améliorer G_1,



Carathéodory coloré. Pour tous sous-ensembles finis $E_1, E_2, \ldots, E_{d+1}$ de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \bigcap_{i=1}^{d+1} \operatorname{conv}(E_i)$, il existe $\{p_i \in E_i\}$ tels que $x \in \operatorname{conv}(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\})$.



$E_1 = \{$ ○, ○, ○ $\}$
$E_2 = \{$ ○, ○, ○ $\}$
$E_3 = \{$ ○, ○, ○ $\}$

Usage

Simplexes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ contenant x et ne partageant pas de sommets.

$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{d+1} \leq k$, appliquer **C. col.** avec $E_j \overset{\text{def}}{=} V(\sigma_{i_j})$

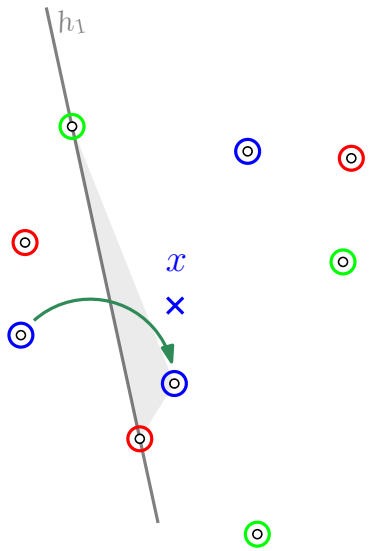
$\rightsquigarrow$ nouveau simplexe contenant x.

Preuve

$A =$ les ensembles arc-en-ciel $\overset{\text{def}}{=} \left\{ G \subset \bigcup_{i=1}^{d+1} E_i \quad : \quad \forall i, \quad |G \cap E_i| = 1 \right\}$.

$G_1 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{argmin}_{G \in A} \operatorname{dist}_{\|\cdot\|_2}(\operatorname{conv}(G), x)$.

Si $x \notin \operatorname{conv}(G_1)$, on peut améliorer G_1, contradiction ! $\square$



Un point de profondeur de demi-espace $\geq \frac{|P|}{d+1}$ est appelé point central.

Un point de profondeur de demi-espace $\geq \frac{|P|}{d+1}$ est appelé point central.

Nous venons de voir :

Théorème du point central. Tout ensemble de point admet un point central.

Lemme de sélection. Tout point central de P rencontre une fraction constante des simplexes à sommets dans P.

Un point de profondeur de demi-espace $\geq \frac{|P|}{d+1}$ est appelé point central.

Nous venons de voir :

Théorème du point central. Tout ensemble de point admet un point central.

Lemme de sélection. Tout point central de P rencontre une fraction constante des simplexes à sommets dans P.

Tout point central appartient à beaucoup de simplexes indépendants à sommets dans P.

Carathéodory coloré : beaucoup de simplexes indépendants
$\rightarrow$ énormément de simplexes distincts.

Un point de profondeur de demi-espace $\geq \frac{|P|}{d+1}$ est appelé point central.

Nous venons de voir :

Théorème du point central. Tout ensemble de point admet un point central.

Lemme de sélection. Tout point central de P rencontre une fraction constante des simplexes à sommets dans P.

Tout point central appartient à beaucoup de simplexes indépendants à sommets dans P.

Carathéodory coloré : beaucoup de simplexes indépendants
$\rightarrow$ énormément de simplexes distincts.

Généralisables aux lois de probabilité dans $\mathbb{R}^d$ (pour les Boréliens).

Ensembles finis $\simeq$ mesures discrètes, puis limite.

Théorème. $\forall \mu, \exists x$ tel que tout demi-espace contenant x est de μ-mesure $\geq \frac{1}{d+1}$.

Théorème. $\forall \mu, \exists x$ tel que $\mathbb{P}_{p_i \sim \mu}\left[x \in \text{conv}(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\}\right] \geq c_d$.

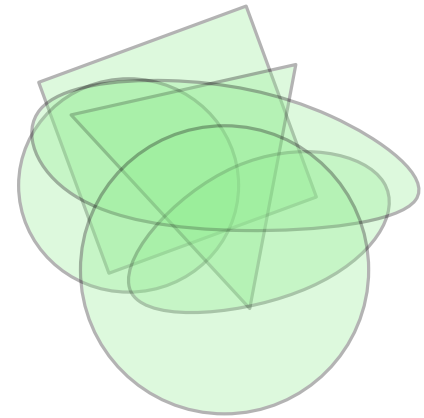
5. Un nouvel outil : Helly fractionnaire

[changement de transparents]

5. Un nouvel outil : Helly fractionnaire

5. Un nouvel outil : Helly fractionnaire

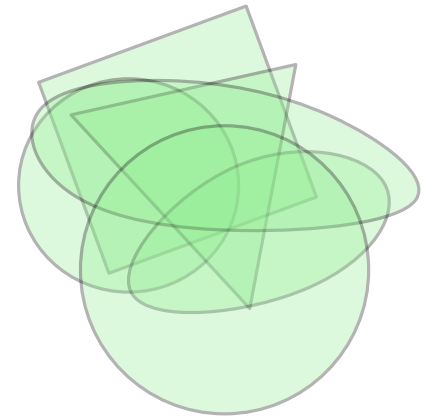
$\mathcal{F}$ une famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$.



5. Un nouvel outil : Helly fractionnaire

$\mathcal{F}$ une famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$.

Beaucoup de $(d+1)$-uplets de $\mathcal{F}$ ont une intersection non vide



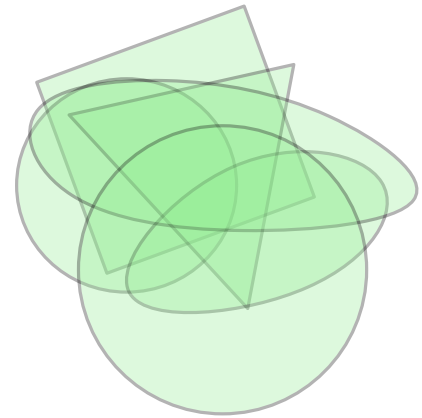
5. Un nouvel outil : Helly fractionnaire

$\mathcal{F}$ une famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$.

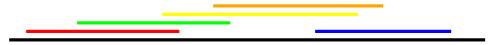
Beaucoup de $(d+1)$-uplets de $\mathcal{F}$ ont une intersection non vide

$\Downarrow ?$

une grande sous-famille de $\mathcal{F}$ est d'intersection non vide.

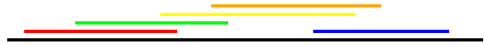


$d = 1$



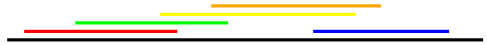
On a vu que si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$ paires se coupent, alors il existe un point commun à $\geq \frac{p}{n} + 1$ des intervalles.

$d = 1$



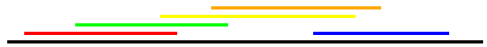
On a vu que si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$ paires se coupent, alors il existe un point commun à $\geq \frac{p}{n} + 1$ des intervalles.

$$p \geq \alpha\binom{n}{2} \Rightarrow \frac{p}{n} + 1 \geq \frac{\alpha}{2}n.$$

$d = 1$ 

On a vu que si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, une fraction $\alpha > 0$ des paires se coupent alors il existe un point commun à une fraction $\alpha/2 > 0$ des intervalles.

$$p \geq \alpha\binom{n}{2} \Rightarrow \frac{p}{n} + 1 \geq \frac{\alpha}{2}n.$$

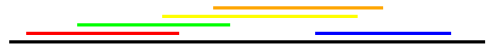
$d = 1$ 

On a vu que si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, une fraction $\alpha > 0$ des paires se coupent alors il existe un point commun à une fraction $\alpha/2 > 0$ des intervalles.

$$p \geq \alpha\binom{n}{2} \Rightarrow \frac{p}{n} + 1 \geq \frac{\alpha}{2}n.$$

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, $\exists \beta > 0$ tel que pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de convexes de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction β de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

$\binom{\mathcal{F}}{d+1} \stackrel{\text{def}}{=}$ l'ensemble des $(d+1)$-uplets de $\mathcal{F}$.

$d = 1$ 

On a vu que si, parmi n intervalles fermés de $\mathbb{R}$, une fraction $\alpha > 0$ des paires se coupent alors il existe un point commun à une fraction $\alpha/2 > 0$ des intervalles.

$p \geq \alpha\binom{n}{2} \Rightarrow \frac{p}{n} + 1 \geq \frac{\alpha}{2}n.$

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, $\exists \beta > 0$ tel que pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de convexes de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction β de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

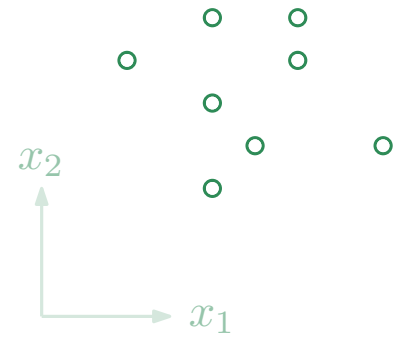
$\binom{\mathcal{F}}{d+1} \stackrel{\text{def}}{=}$ l'ensemble des $(d+1)$-uplets de $\mathcal{F}$.

Version faible : $\beta = \frac{\alpha}{d+1}$, preuve similaire au cas $d = 1$.

Intersection $\neq \emptyset \mapsto$ point maximal.

Principe des tiroirs.

On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



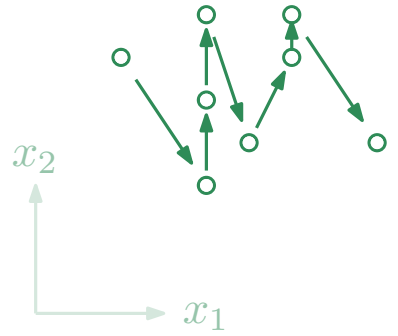
$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$

ou $x_1 = y_1$ et $x_2 < y_2$

...

ou $(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1})$ et $x_d < y_d$

On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



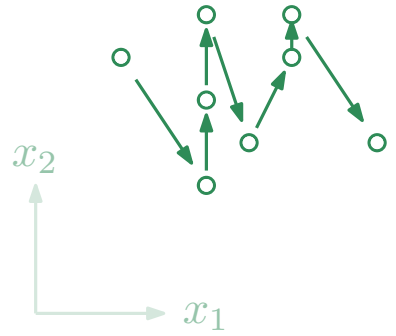
$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$

ou $x_1 = y_1$ et $x_2 < y_2$

...

ou $(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1})$ et $x_d < y_d$

On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$

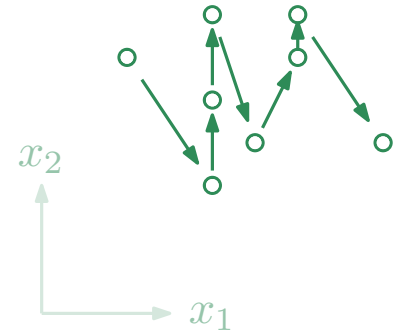
ou $x_1 = y_1$ et $x_2 < y_2$

...

ou $(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1})$ et $x_d < y_d$

Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_{\prec} X$.

On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$

ou $x_1 = y_1$ et $x_2 < y_2$

...

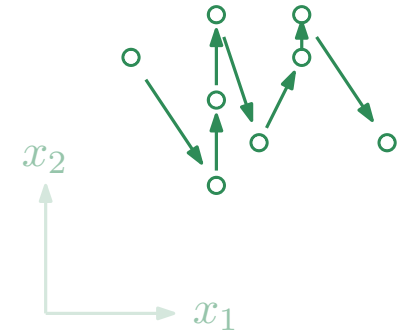
ou $(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1})$ et $x_d < y_d$

Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X \in \mathcal{A}} X.$

Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$, il existe un intervalle $B \in \mathcal{A}$ tel que $\max_\prec (\cap\mathcal{A}) = \max_\prec B$.

On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$

ou $x_1 = y_1$ et $x_2 < y_2$

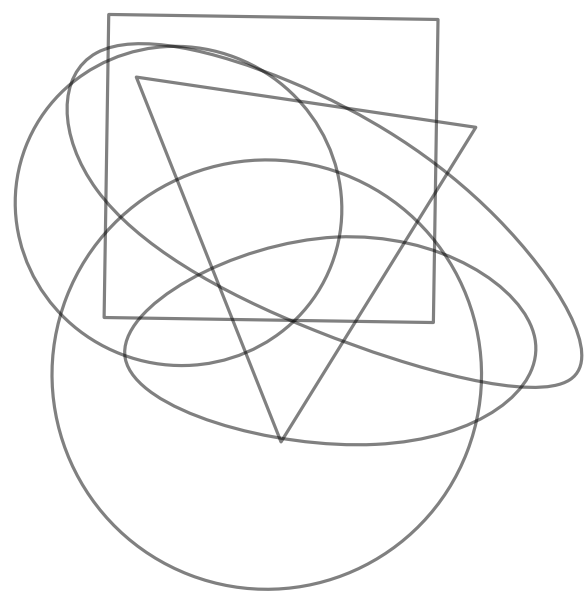
...

ou $(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1})$ et $x_d < y_d$

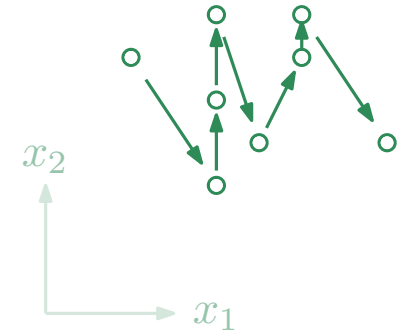
Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec (\cap\mathcal{A}) = \max_\prec (\cap\mathcal{B})$.



On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$

ou $x_1 = y_1$ et $x_2 < y_2$

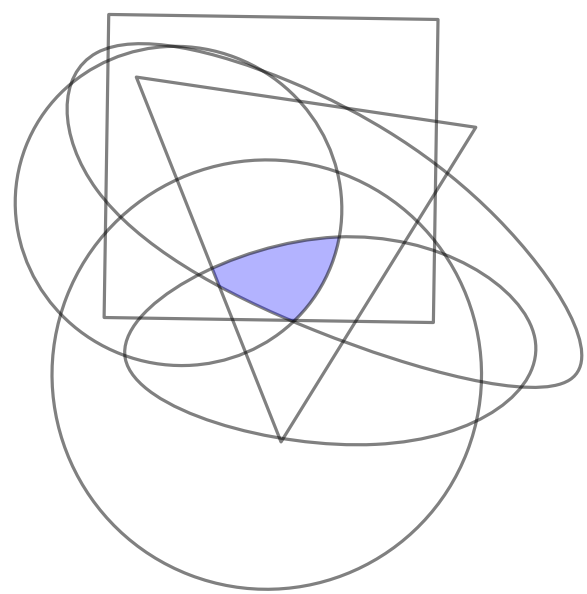
...

ou $(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1})$ et $x_d < y_d$

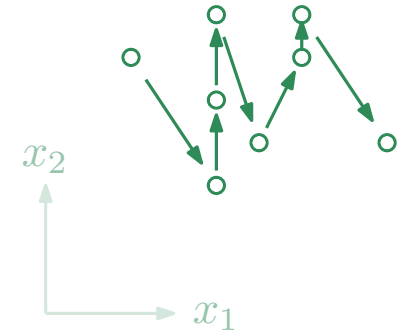
Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec(\cap\mathcal{A}) = \max_\prec(\cap\mathcal{B})$.



On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$

ou $x_1 = y_1$ et $x_2 < y_2$

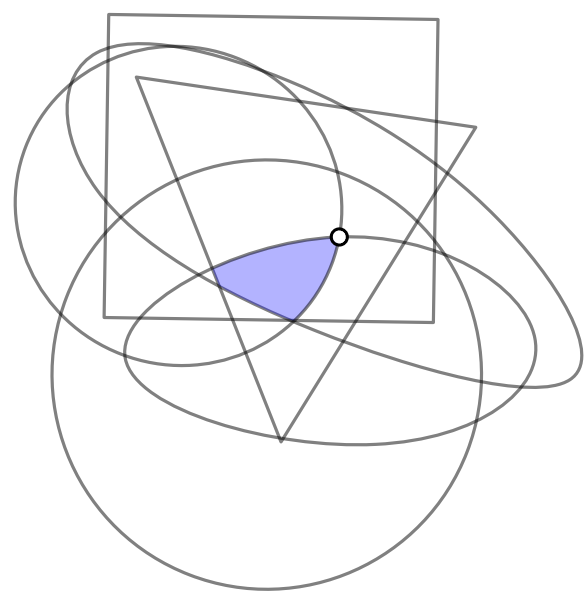
...

ou $(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1})$ et $x_d < y_d$

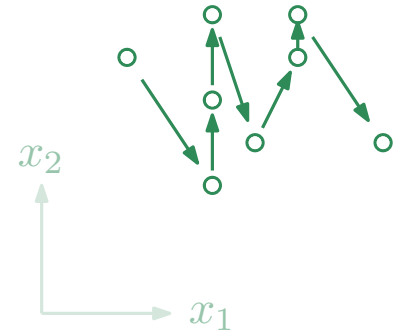
Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec(\cap\mathcal{A}) = \max_\prec(\cap\mathcal{B})$.



On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$

ou $x_1 = y_1$ et $x_2 < y_2$

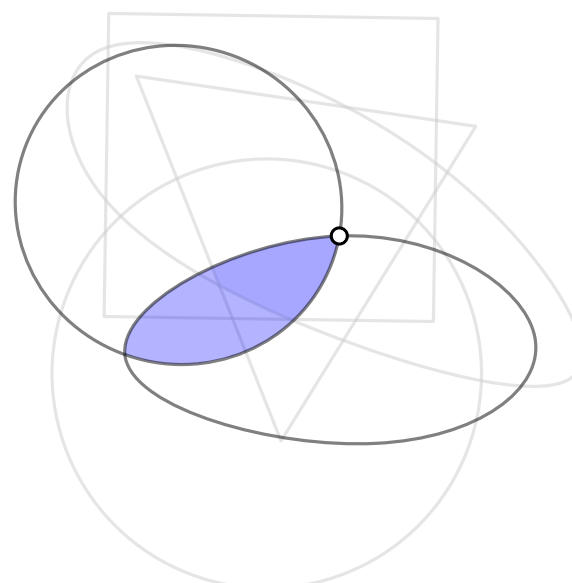
...

ou $(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1})$ et $x_d < y_d$

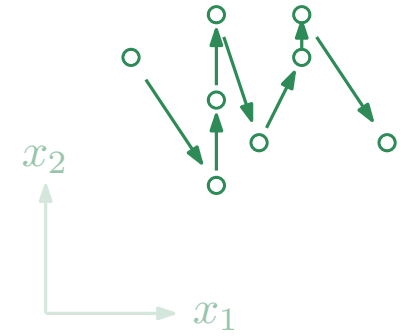
Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec(\cap\mathcal{A}) = \max_\prec(\cap\mathcal{B})$.



On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$

ou $x_1 = y_1$ et $x_2 < y_2$

...

ou $(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1})$ et $x_d < y_d$

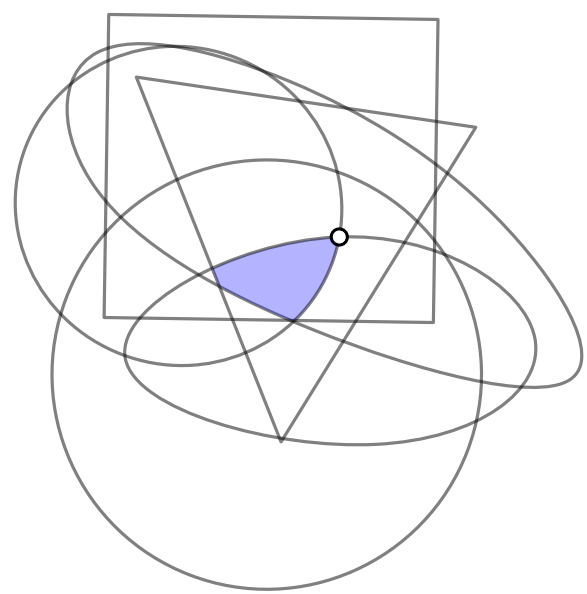
Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

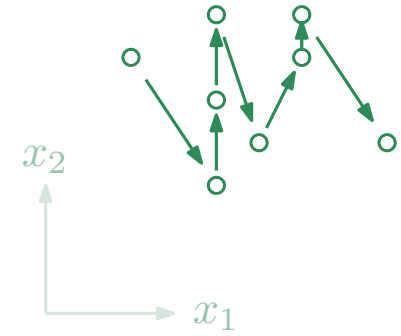
Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec (\cap\mathcal{A}) = \max_\prec (\cap\mathcal{B})$.

Preuve

$p^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_\prec (\cap\mathcal{A})$



On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$

ou $x_1 = y_1$ et $x_2 < y_2$

...

ou $(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1})$ et $x_d < y_d$

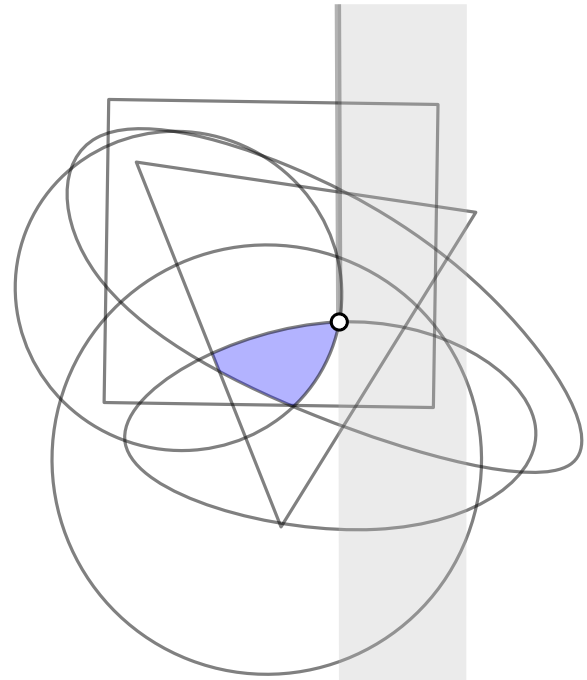
Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

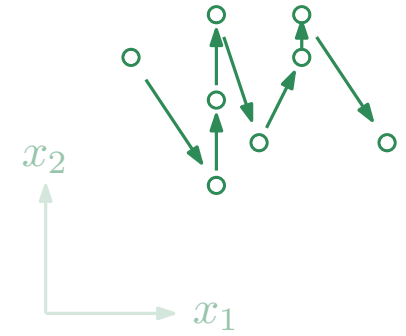
Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec (\cap\mathcal{A}) = \max_\prec (\cap\mathcal{B})$.

Preuve

$p^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_\prec (\cap\mathcal{A})$ et $h \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : p^* \prec x\}$,



On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$
$$\text{ou } x_1 = y_1 \text{ et } x_2 < y_2$$
$$\ldots$$
$$\text{ou } (x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1}) \text{ et } x_d < y_d$$

Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

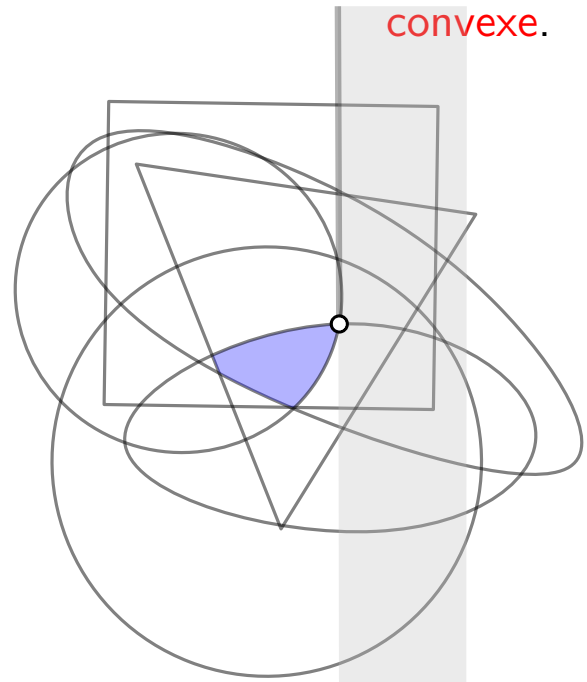
$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec(\cap\mathcal{A}) = \max_\prec(\cap\mathcal{B})$.

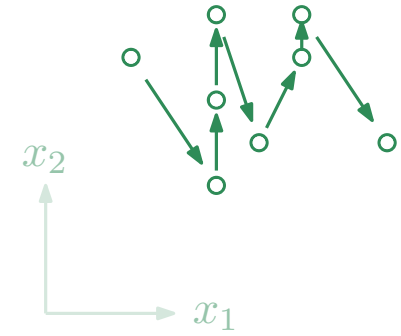
Preuve

$p^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_\prec(\cap\mathcal{A})$ et $h \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : p^* \prec x\}$,

convexe.



On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$
$$\text{ou } x_1 = y_1 \text{ et } x_2 < y_2$$
$$\ldots$$
$$\text{ou } (x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1}) \text{ et } x_d < y_d$$

Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

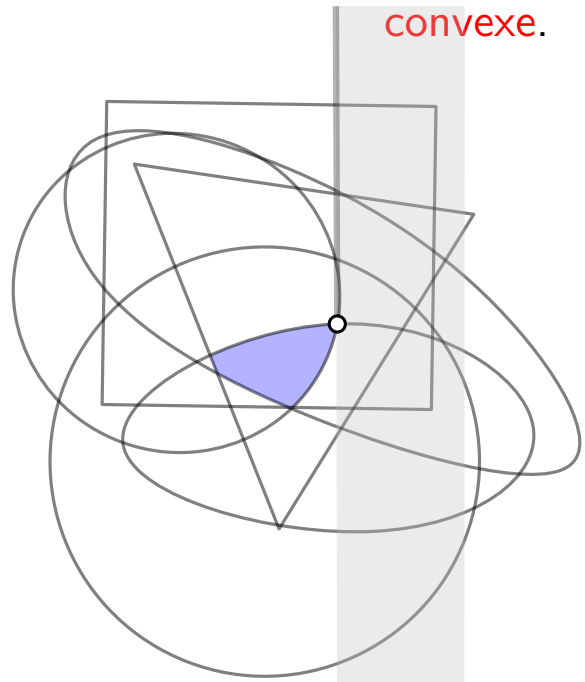
$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec(\cap\mathcal{A}) = \max_\prec(\cap\mathcal{B})$.

Preuve

$p^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_\prec(\cap\mathcal{A})$ et $h \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : p^* \prec x\}$,

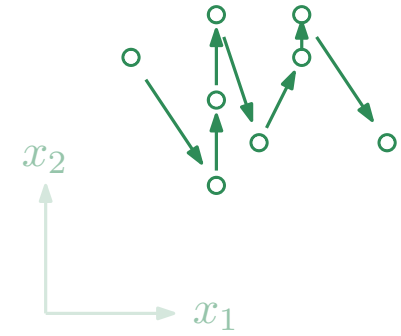
convexe.



$\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}, \quad \max_\prec(\cap\mathcal{A}) \in \cap\mathcal{B}.$

but : trouver $\mathcal{B}$ tel que $\cap\mathcal{B}$ évite h.

On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$
$$\text{ou } x_1 = y_1 \text{ et } x_2 < y_2$$
$$\ldots$$
$$\text{ou } (x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1}) \text{ et } x_d < y_d$$

Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

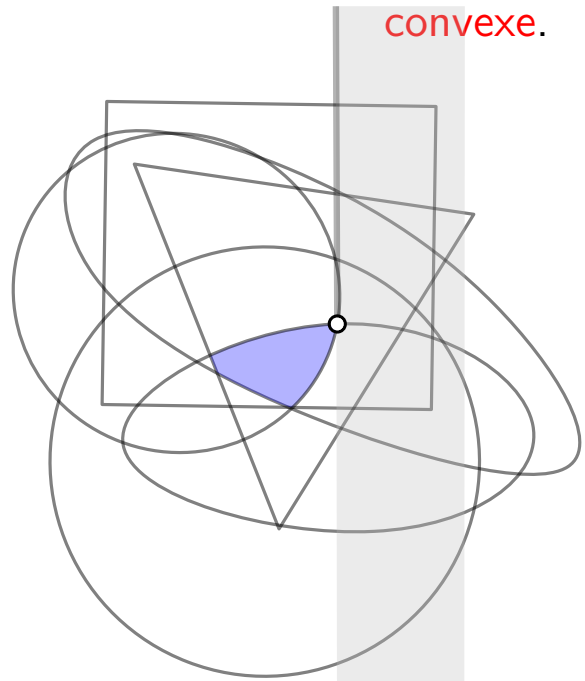
$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec(\cap\mathcal{A}) = \max_\prec(\cap\mathcal{B})$.

Preuve

$p^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_\prec(\cap\mathcal{A})$ et $h \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : p^* \prec x\}$,

convexe.

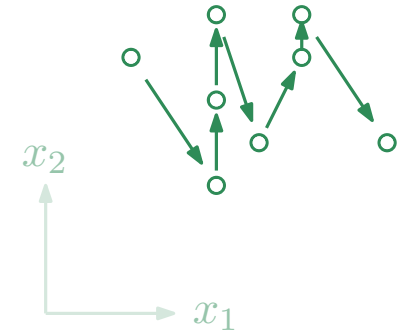


$\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}, \quad \max_\prec(\cap\mathcal{A}) \in \cap\mathcal{B}.$

but : trouver $\mathcal{B}$ tel que $\cap\mathcal{B}$ évite h.

$\cap(\mathcal{A} \cup \{h\}) = \emptyset$ **Helly** ?

On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$
$$\text{ou } x_1 = y_1 \text{ et } x_2 < y_2$$
$$\ldots$$
$$\text{ou } (x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1}) \text{ et } x_d < y_d$$

Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

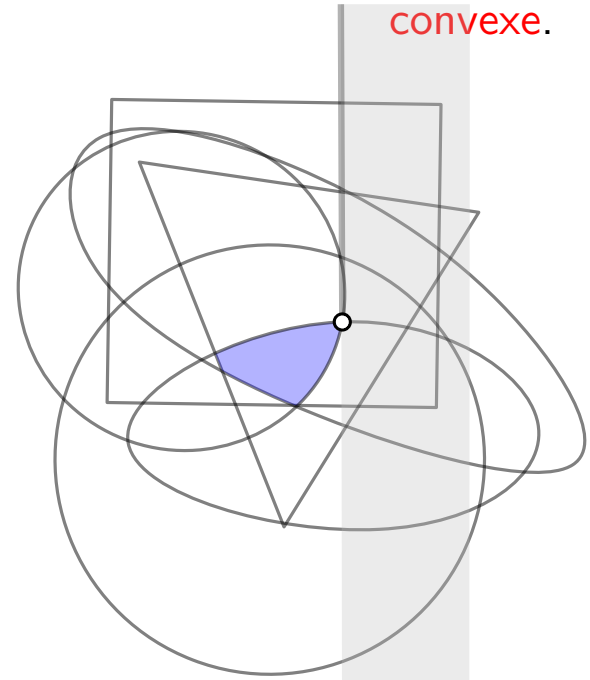
$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec(\cap\mathcal{A}) = \max_\prec(\cap\mathcal{B})$.

Preuve

$p^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_\prec(\cap\mathcal{A})$ et $h \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : p^* \prec x\}$,

convexe.

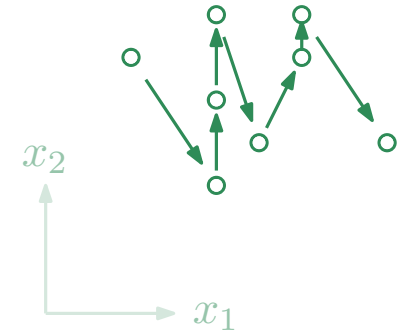


$\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}, \quad \max_\prec(\cap\mathcal{A}) \in \cap\mathcal{B}.$

but : trouver $\mathcal{B}$ tel que $\cap\mathcal{B}$ évite h.

$\cap(\mathcal{A} \cup \{h\}) = \emptyset$ **Helly**
$\Rightarrow \quad \exists\, \mathcal{B}' \subset \mathcal{A} \cup \{h\}$ tq $|\mathcal{B}'| \leq d+1$ et $\cap\mathcal{B}' = \emptyset$.

On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$
$$\text{ou } x_1 = y_1 \text{ et } x_2 < y_2$$
$$\ldots$$
$$\text{ou } (x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1}) \text{ et } x_d < y_d$$

Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

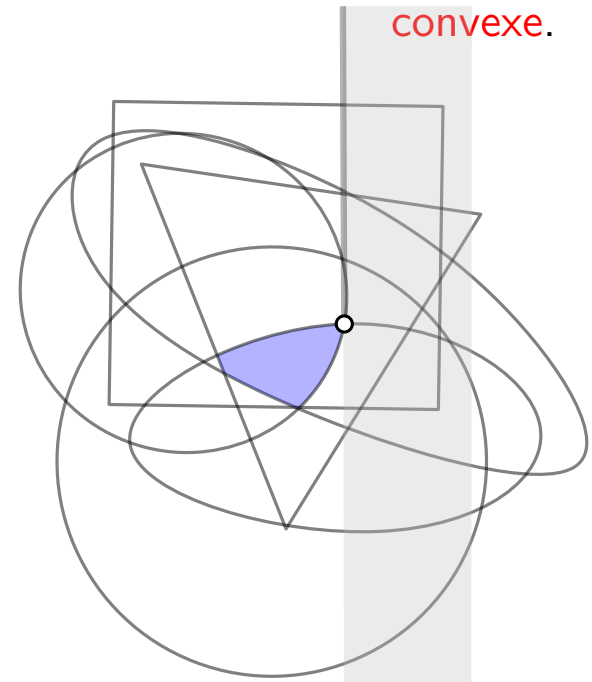
$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec(\cap\mathcal{A}) = \max_\prec(\cap\mathcal{B})$.

Preuve

$p^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_\prec(\cap\mathcal{A})$ et $h \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : p^* \prec x\}$,

convexe.



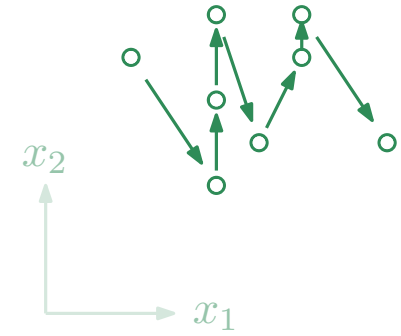
$\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}, \quad \max_\prec(\cap\mathcal{A}) \in \cap\mathcal{B}.$

but : trouver $\mathcal{B}$ tel que $\cap\mathcal{B}$ évite h.

$\cap(\mathcal{A} \cup \{h\}) = \emptyset$ **Helly**
$\Rightarrow \quad \exists\, \mathcal{B}' \subset \mathcal{A} \cup \{h\}$ tq $|\mathcal{B}'| \leq d+1$ et $\cap\mathcal{B}' = \emptyset$.

$\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}' \setminus \{h\}$ convient.

On munit $\mathbb{R}^d$ de l'ordre lexicographique, noté $\prec$.



$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_d) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1$$
$$\text{ou } x_1 = y_1 \text{ et } x_2 < y_2$$
$$\ldots$$
$$\text{ou } (x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{d-1}) \text{ et } x_d < y_d$$

Tout compact $X \subset \mathbb{R}^d$ a un point maximum pour $\prec$, noté $\max_\prec X$.

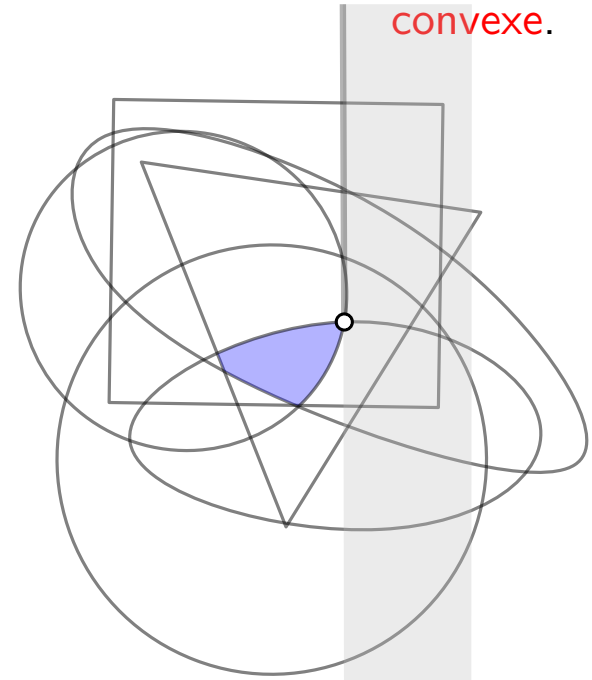
$\cap\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{X\in\mathcal{A}} X.$

Lemme. Pour toute famille finie $\mathcal{A}$ de compacts convexes de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{B}| \leq d$ et $\max_\prec(\cap\mathcal{A}) = \max_\prec(\cap\mathcal{B})$.

Preuve

$p^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_\prec(\cap\mathcal{A})$ et $h \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : p^* \prec x\}$,

convexe.



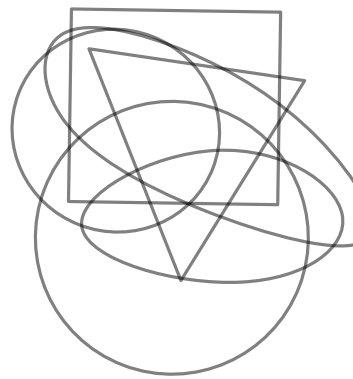
$\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}, \quad \max_\prec(\cap\mathcal{A}) \in \cap\mathcal{B}.$

but : trouver $\mathcal{B}$ tel que $\cap\mathcal{B}$ évite h.

$\cap(\mathcal{A} \cup \{h\}) = \emptyset$ **Helly**
$\Rightarrow \quad \exists\, \mathcal{B}' \subset \mathcal{A} \cup \{h\}$ tq $|\mathcal{B}'| \leq d+1$ et $\cap\mathcal{B}' = \emptyset$.

$\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}' \setminus \{h\}$ convient. $\square$

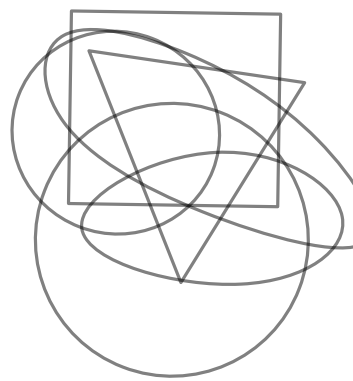
Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.



Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve

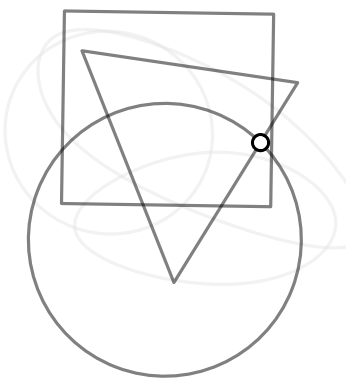
$\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{F}}{d+1} \quad \mapsto \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de même $\max_{\prec}$ et taille d.
t. q. $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$



Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve

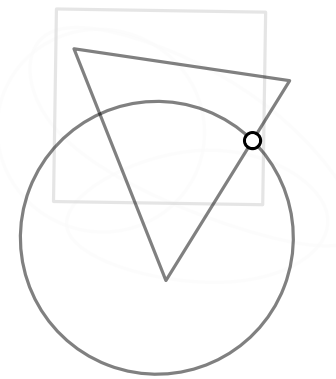
$\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{F}}{d+1} \quad \mapsto \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de même $\max_{\prec}$ et taille d.
t. q. $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$



Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve

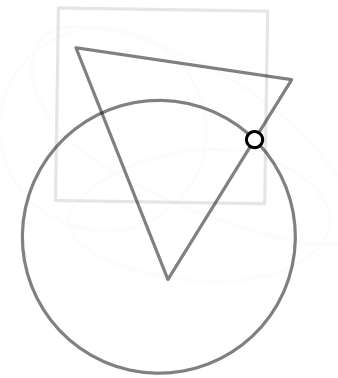
$\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{F}}{d+1} \quad \mapsto \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de même $\max_{\prec}$ et taille d.
t. q. $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$



Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve

$\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{F}}{d+1} \quad \mapsto \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de même $\max_{\prec}$ et taille d.
t. q. $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$

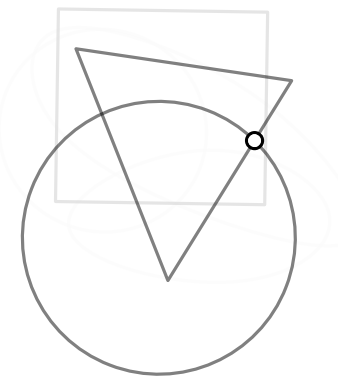


Pour $\mathcal{B} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$, le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ contenant $\max_{\prec}(\cap \mathcal{B})$ est au moins $\geq d+$ nombre de fois où $\mathcal{B}$ a été choisi.

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve

$\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{F}}{d+1} \quad \mapsto \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de même $\max_{\prec}$ et taille d.
t. q. $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$



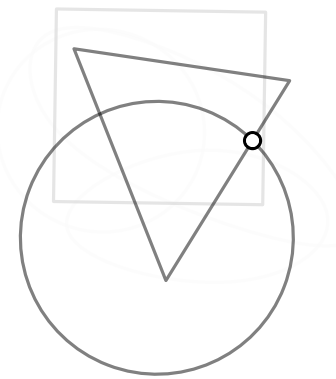
Pour $\mathcal{B} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$, le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ contenant $\max_{\prec}(\cap \mathcal{B})$ est au moins $\geq d+$ nombre de fois où $\mathcal{B}$ a été choisi.

$\exists\, \mathcal{B}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ choisi au moins $\frac{\alpha \binom{|\mathcal{F}|}{d+1}}{\binom{|\mathcal{F}|}{d}} = \frac{\alpha}{d+1}(|\mathcal{F}| - d)$ fois.

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve

$\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{F}}{d+1} \quad \mapsto \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de même $\max_{\prec}$ et taille d.
t. q. $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$



Pour $\mathcal{B} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$, le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ contenant $\max_{\prec}(\cap \mathcal{B})$ est au moins $\geq d+$ nombre de fois où $\mathcal{B}$ a été choisi.

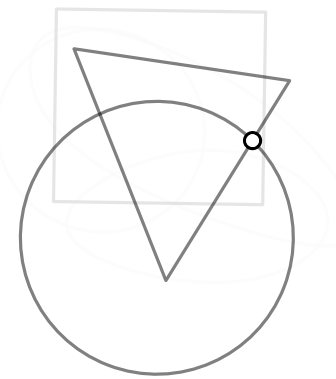
$\exists\, \mathcal{B}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ choisi au moins $\frac{\alpha\binom{|\mathcal{F}|}{d+1}}{\binom{|\mathcal{F}|}{d}} = \frac{\alpha}{d+1}(|\mathcal{F}| - d)$ fois.

$\max_{\prec}(\cap \mathcal{B}_0)$ appartient à au moins $d + \frac{\alpha}{d+1}(|\mathcal{F}| - d)$ éléments de $\mathcal{F}$.

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve

$\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{F}}{d+1} \quad \mapsto \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de même $\max_\prec$ et taille d.
t. q. $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$



Pour $\mathcal{B} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$, le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ contenant $\max_\prec (\cap \mathcal{B})$ est au moins $\geq d+$ nombre de fois où $\mathcal{B}$ a été choisi.

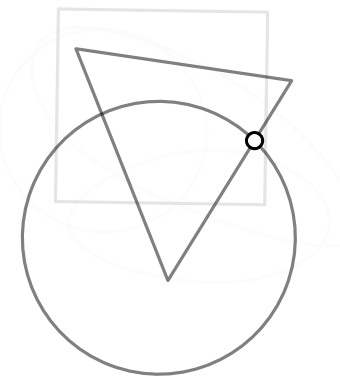
$\exists\, \mathcal{B}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ choisi au moins $\frac{\alpha \binom{|\mathcal{F}|}{d+1}}{\binom{|\mathcal{F}|}{d}} = \frac{\alpha}{d+1}\,(|\mathcal{F}| - d)$ fois.

$\max_\prec (\cap \mathcal{B}_0)$ appartient à au moins $d + \frac{\alpha}{d+1}(|\mathcal{F}| - d) \geq \frac{\alpha}{d+1}|\mathcal{F}|$ éléments de $\mathcal{F}$.

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve

$\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{F}}{d+1} \quad \mapsto \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de même $\max_\prec$ et taille d.
t. q. $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$



Pour $\mathcal{B} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$, le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ contenant $\max_\prec (\cap \mathcal{B})$ est au moins $\geq d+$ nombre de fois où $\mathcal{B}$ a été choisi.

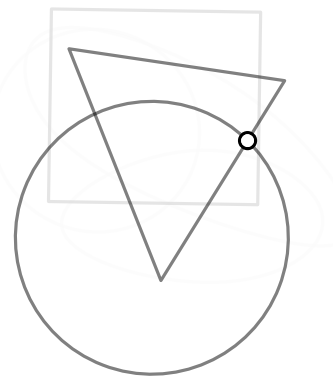
$\exists\, \mathcal{B}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ choisi au moins $\frac{\alpha \binom{|\mathcal{F}|}{d+1}}{\binom{|\mathcal{F}|}{d}} = \frac{\alpha}{d+1}\,(|\mathcal{F}| - d)$ fois.

$\max_\prec (\cap \mathcal{B}_0)$ appartient à au moins $d + \frac{\alpha}{d+1}(|\mathcal{F}| - d) \geq \frac{\alpha}{d+1}|\mathcal{F}|$ éléments de $\mathcal{F}$. $\square$

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve

$\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{F}}{d+1} \quad \mapsto \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de même $\max_\prec$ et taille d.
t. q. $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$



Pour $\mathcal{B} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$, le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ contenant $\max_\prec (\cap \mathcal{B})$ est au moins $\geq d+$ nombre de fois où $\mathcal{B}$ a été choisi.

$\exists\, \mathcal{B}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ choisi au moins $\frac{\alpha \binom{|\mathcal{F}|}{d+1}}{\binom{|\mathcal{F}|}{d}} = \frac{\alpha}{d+1}(|\mathcal{F}| - d)$ fois.

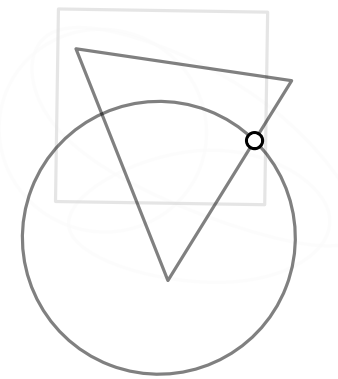
$\max_\prec (\cap \mathcal{B}_0)$ appartient à au moins $d + \frac{\alpha}{d+1}(|\mathcal{F}| - d) \geq \frac{\alpha}{d+1}|\mathcal{F}|$ éléments de $\mathcal{F}$. $\square$

Le terme $\frac{\alpha}{d+1}$ n'est pas optimal.

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve

$\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{F}}{d+1} \quad \mapsto \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de même $\max_\prec$ et taille d.
t. q. $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$



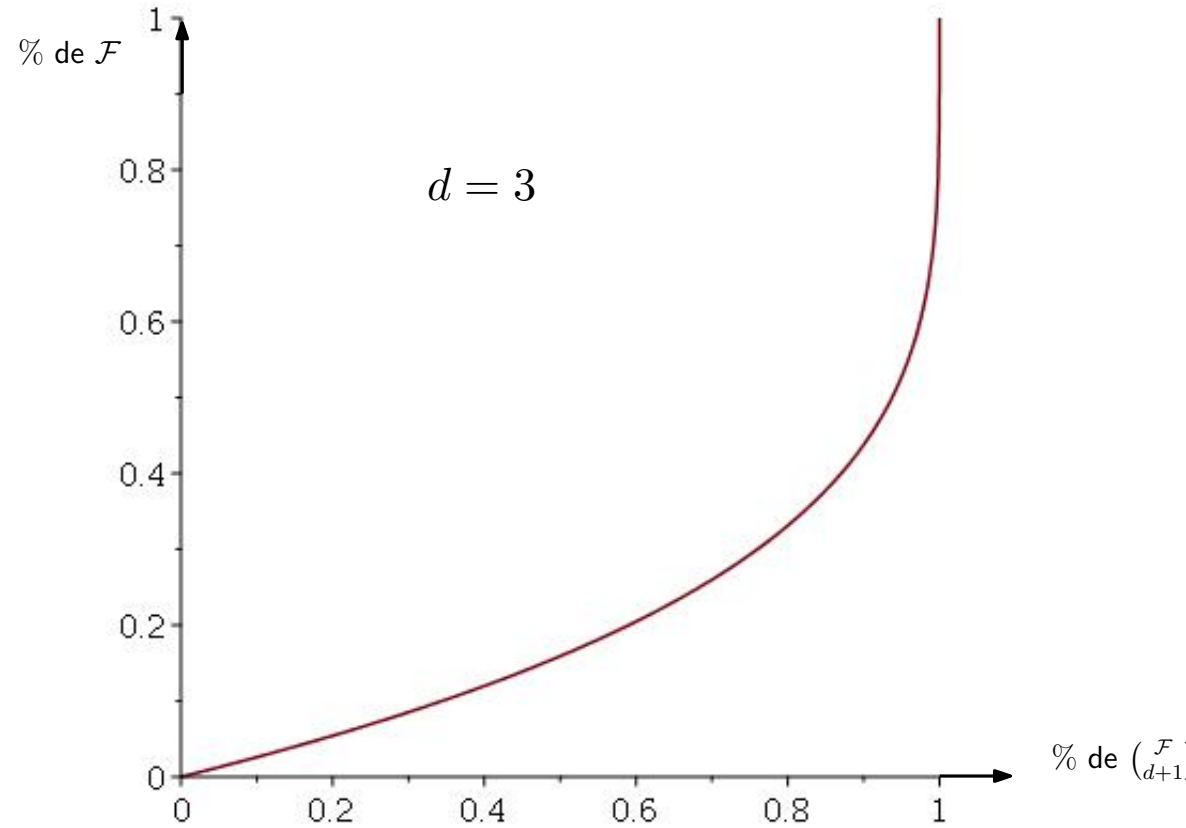
Pour $\mathcal{B} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$, le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ contenant $\max_\prec (\cap \mathcal{B})$ est au moins $\geq d+$ nombre de fois où $\mathcal{B}$ a été choisi.

$\exists\, \mathcal{B}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ choisi au moins $\frac{\alpha\binom{|\mathcal{F}|}{d+1}}{\binom{|\mathcal{F}|}{d}} = \frac{\alpha}{d+1}(|\mathcal{F}| - d)$ fois.

$\max_\prec (\cap \mathcal{B}_0)$ appartient à au moins $d + \frac{\alpha}{d+1}(|\mathcal{F}| - d) \geq \frac{\alpha}{d+1}|\mathcal{F}|$ éléments de $\mathcal{F}$. $\square$

Le terme $\frac{\alpha}{d+1}$ n'est pas optimal. En fait, une fraction $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

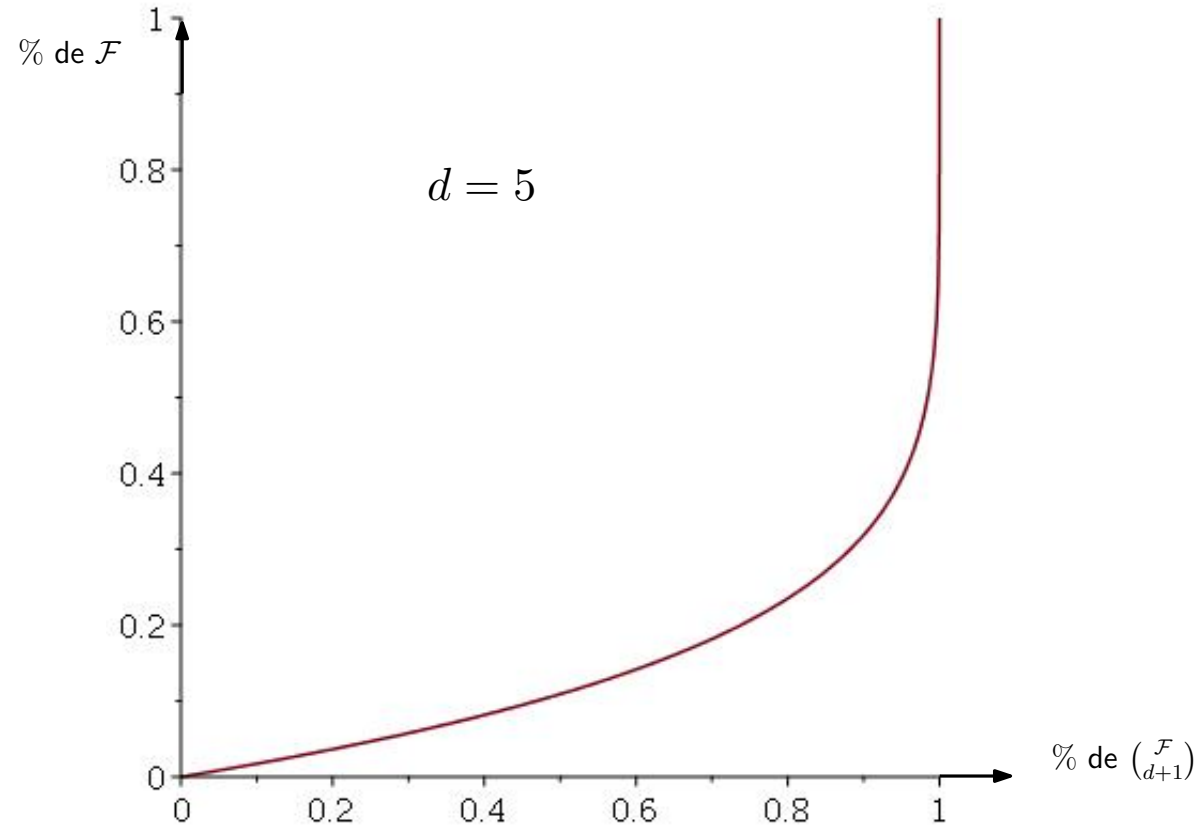
Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.



□

Le terme $\frac{\alpha}{d+1}$ n'est pas optimal. En fait, une fraction $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

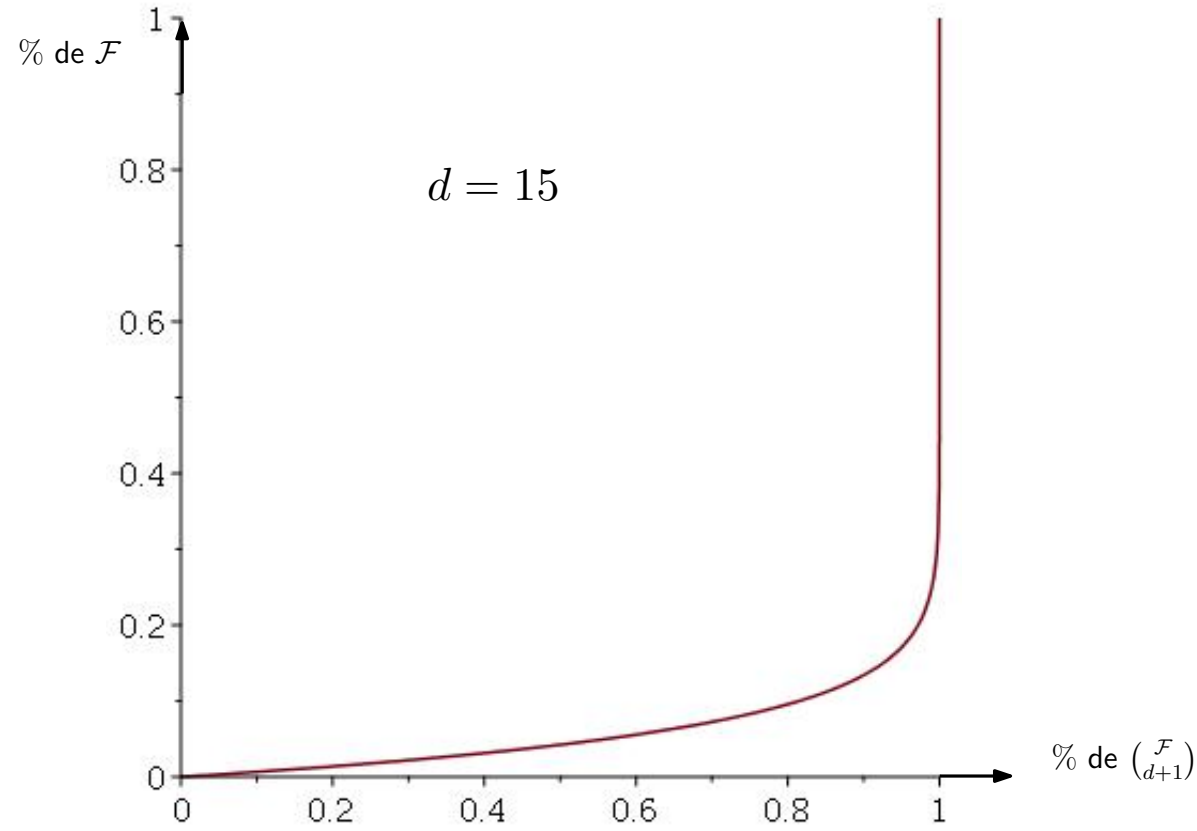
Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.



□

Le terme $\frac{\alpha}{d+1}$ n'est pas optimal. En fait, une fraction $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

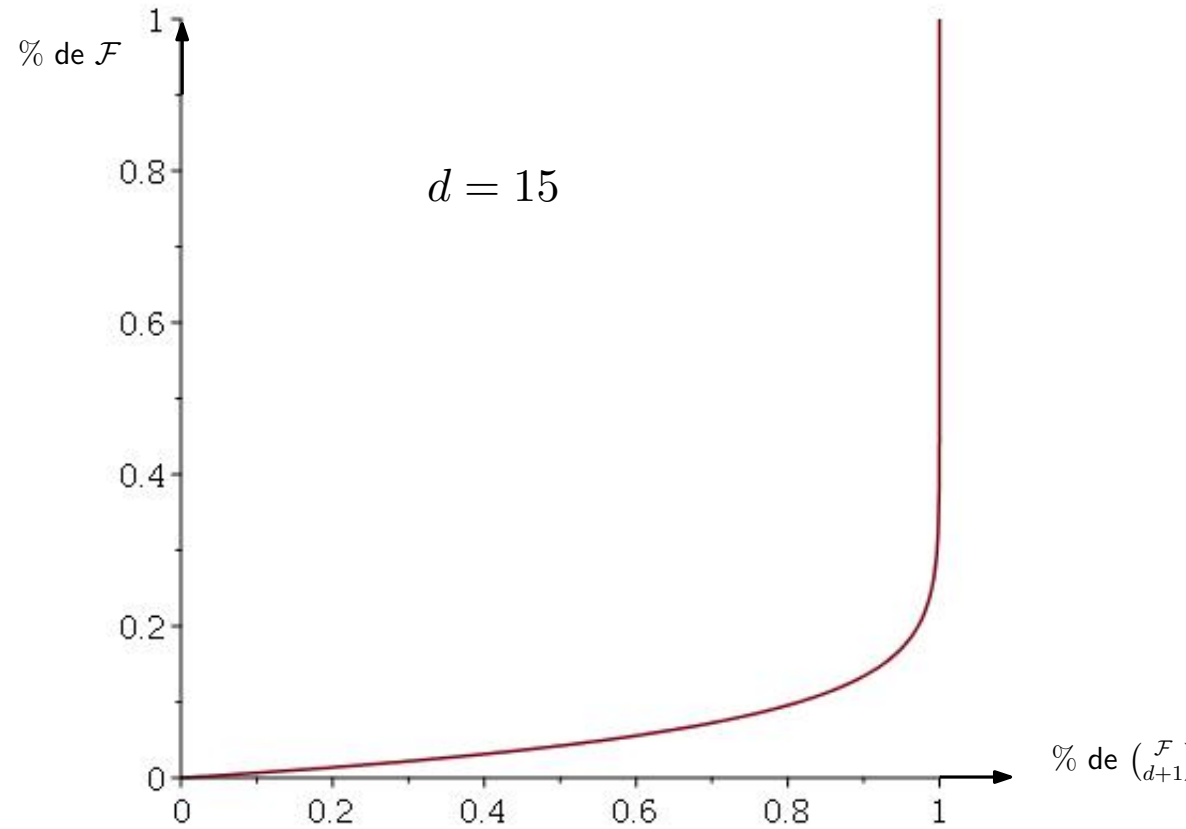
Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.



□

Le terme $\frac{\alpha}{d+1}$ n'est pas optimal. En fait, une fraction $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

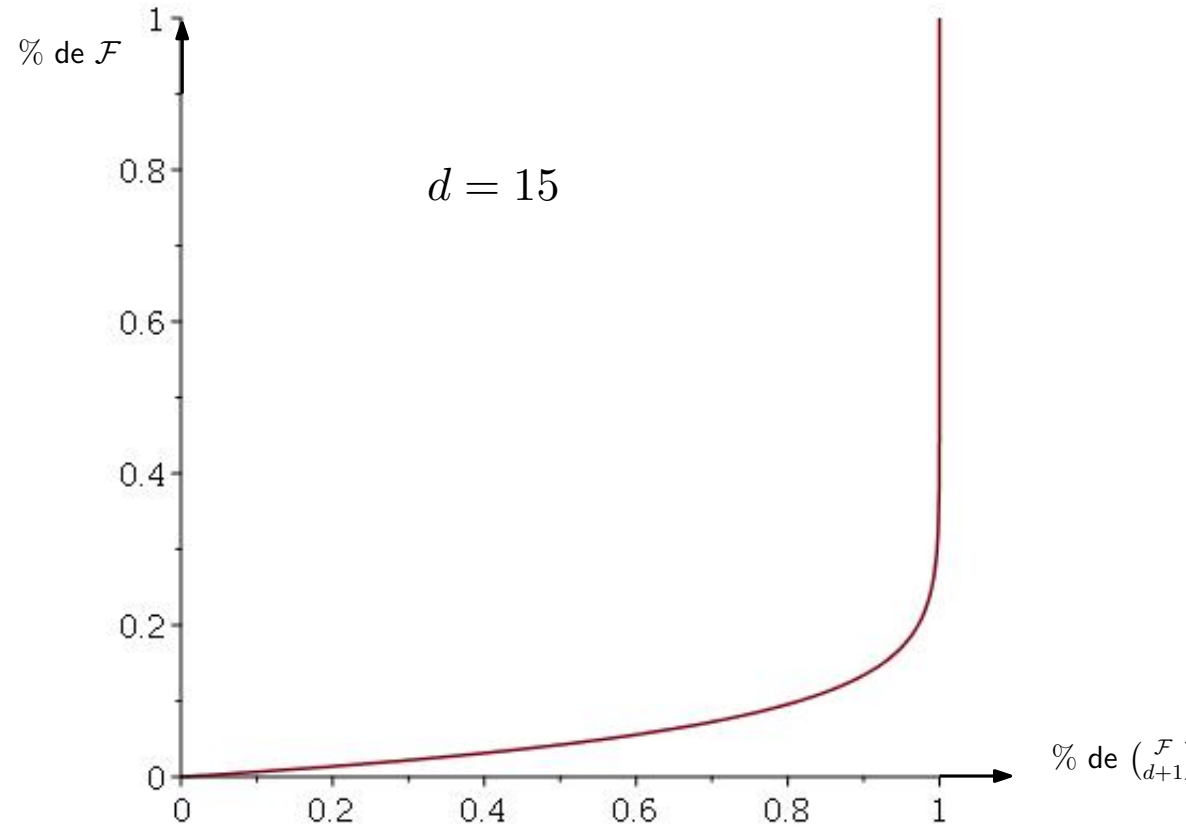


□

Le terme $\frac{\alpha}{d+1}$ n'est pas optimal. En fait, une fraction $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve combinatoire, idées topologiques... semaine prochaine !

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α de $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $\frac{\alpha}{d+1}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.



□

Le terme $\frac{\alpha}{d+1}$ n'est pas optimal. En fait, une fraction $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Preuve combinatoire, idées topologiques... semaine prochaine !

Voyons des applications...

6. Applications à la programmation linéaire

6. Applications à la programmation linéaire

Minimisation d'une fonction linéaire sous contraintes linéaires.

6. Applications à la programmation linéaire

Minimisation d'une fonction linéaire sous contraintes linéaires.

S'exprime en terme d'intersections de demi-espaces.

6. Applications à la programmation linéaire

Minimisation d'une fonction linéaire sous contraintes linéaires.

S'exprime en terme d'intersections de demi-espaces.

S'analyse via **Helly** et **Helly fractionnaire**.

6. Applications à la programmation linéaire

Minimisation d'une fonction linéaire sous contraintes linéaires.

S'exprime en terme d'intersections de demi-espaces.

S'analyse via **Helly** et **Helly fractionnaire**.

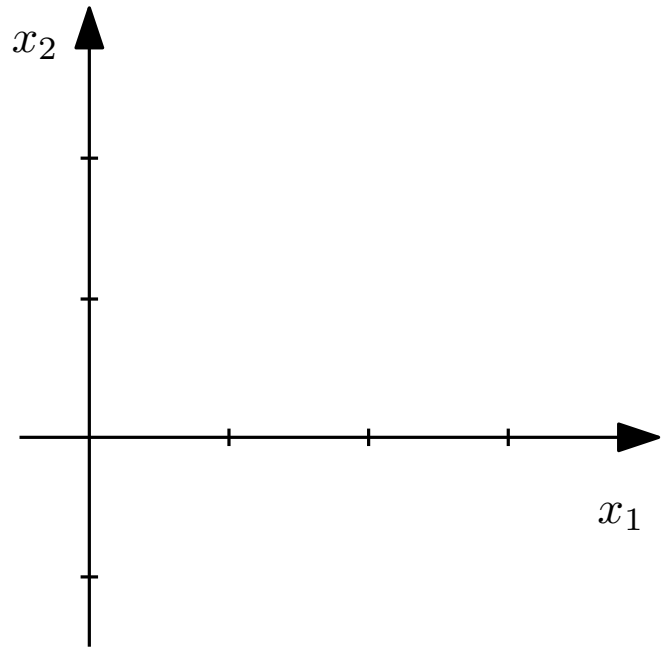
Les résultats se généralisent à la programmation convexe et au-delà...

Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$

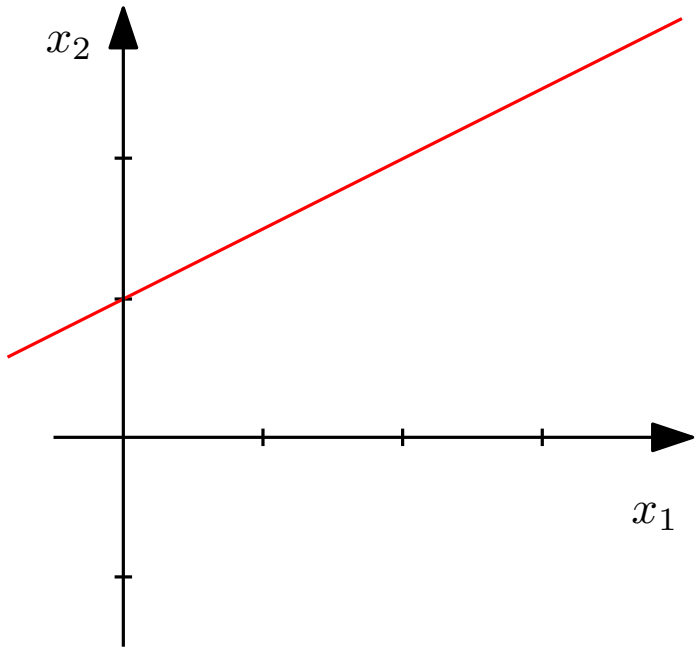
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{aligned}$$



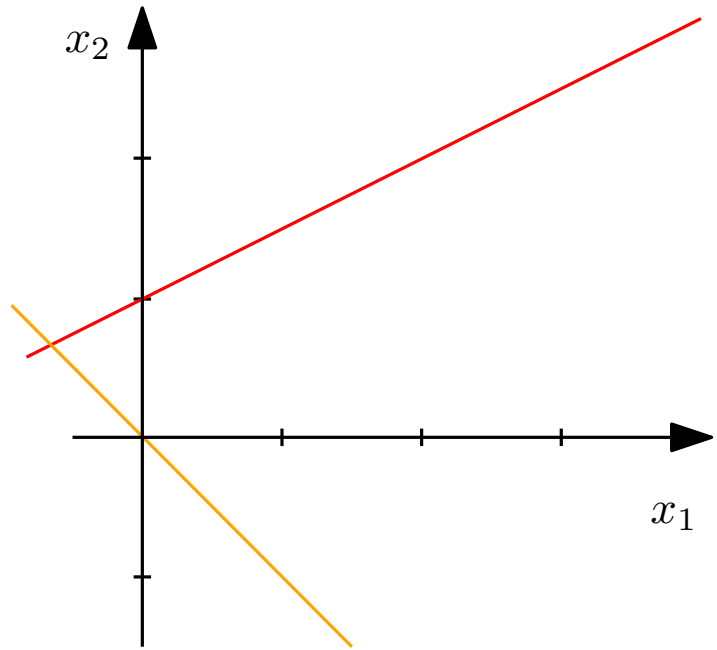
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



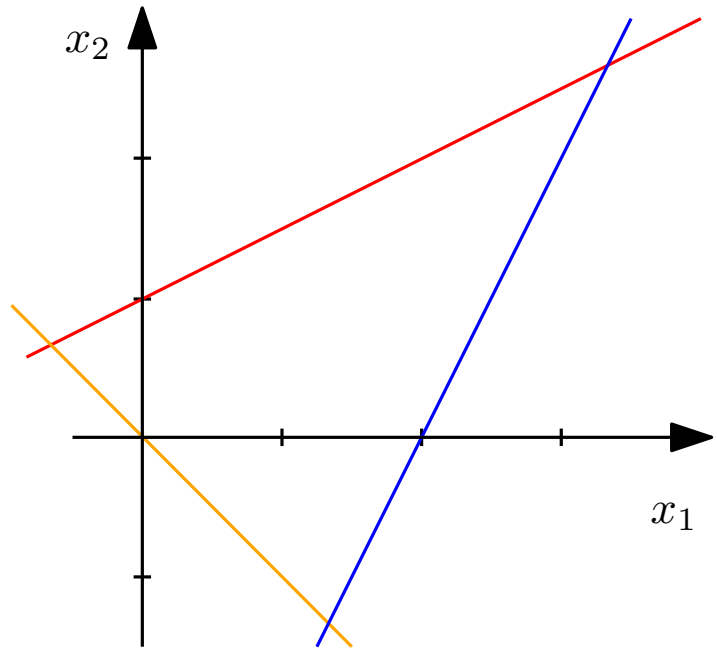
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{aligned}$$



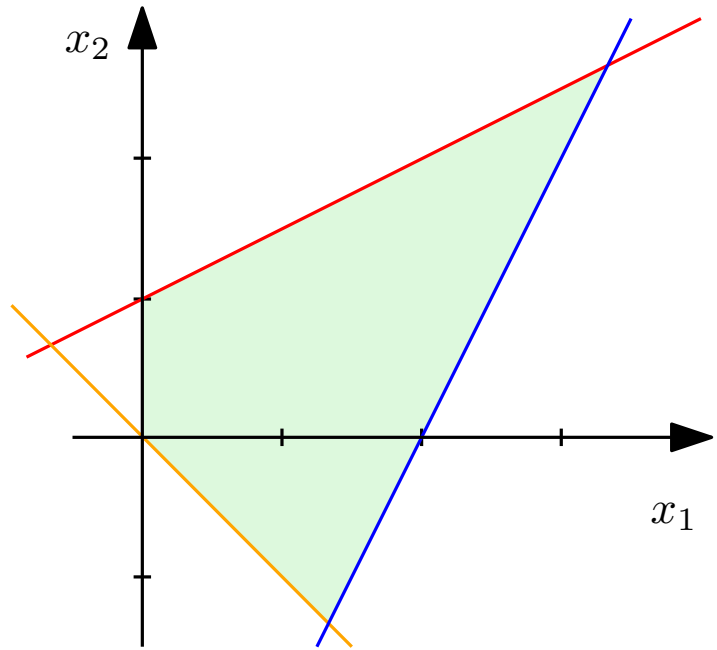
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



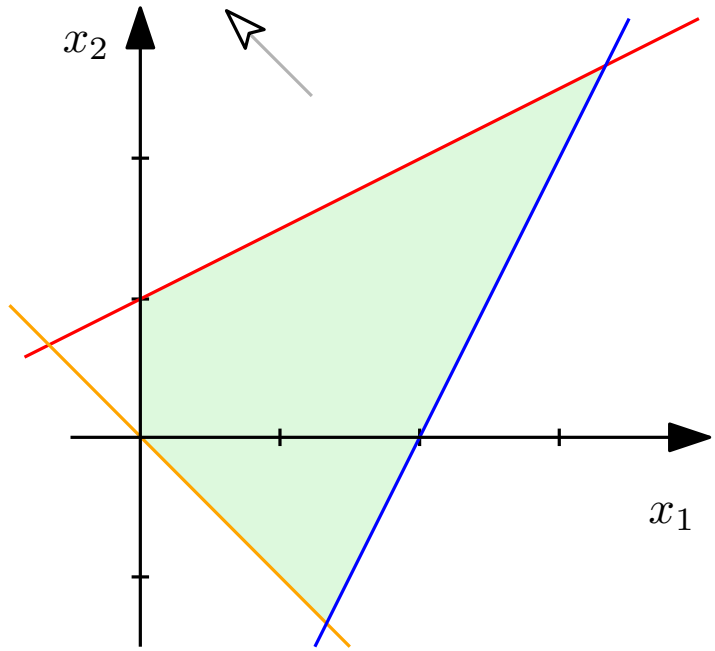
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



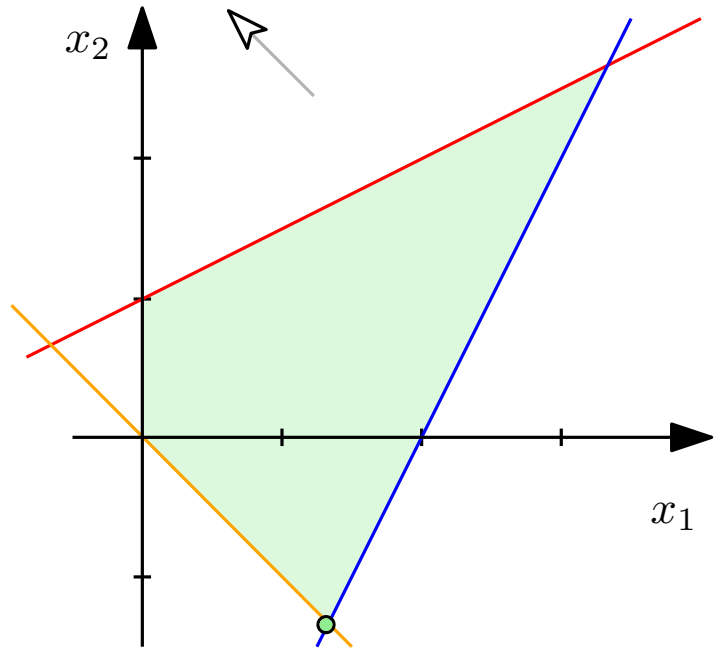
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{aligned}$$



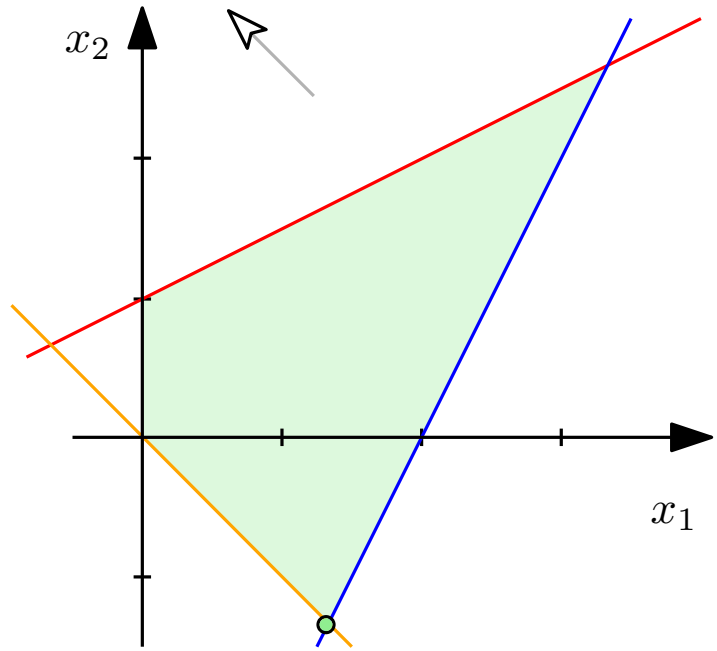
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{aligned}$$



Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{aligned}$$



Une forme générale

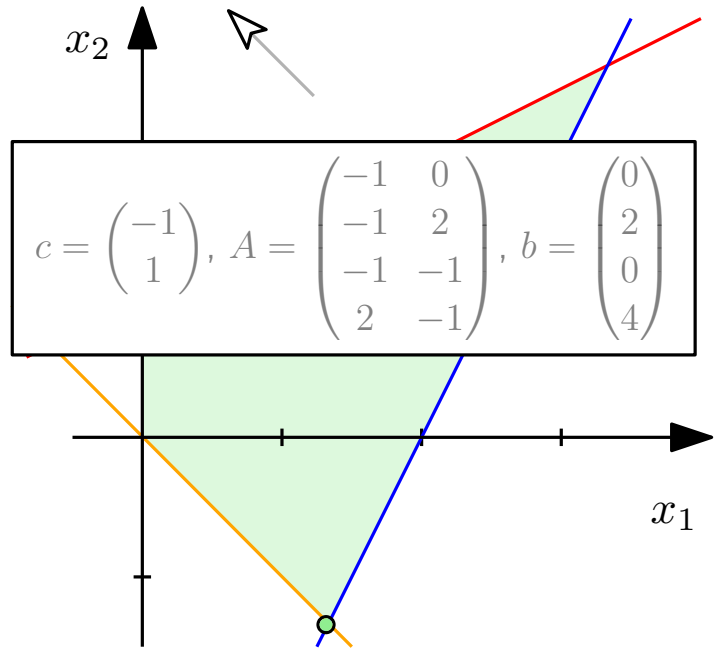
$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{t. q.} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^d$ un vecteur d'indéterminées

$c \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$ des constantes.

Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



Une forme générale

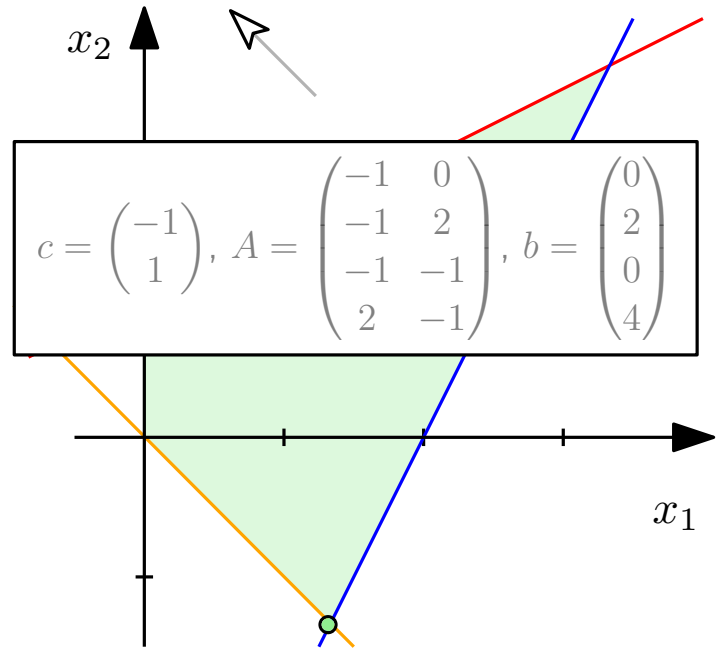
$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{t. q.} & Ax \leq b \end{array}$$

$x \in \mathbb{R}^d$ un vecteur d'indéterminées

$c \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$ des constantes.

Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



Une forme générale

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{t. q.} & Ax \leq b \end{array}$$

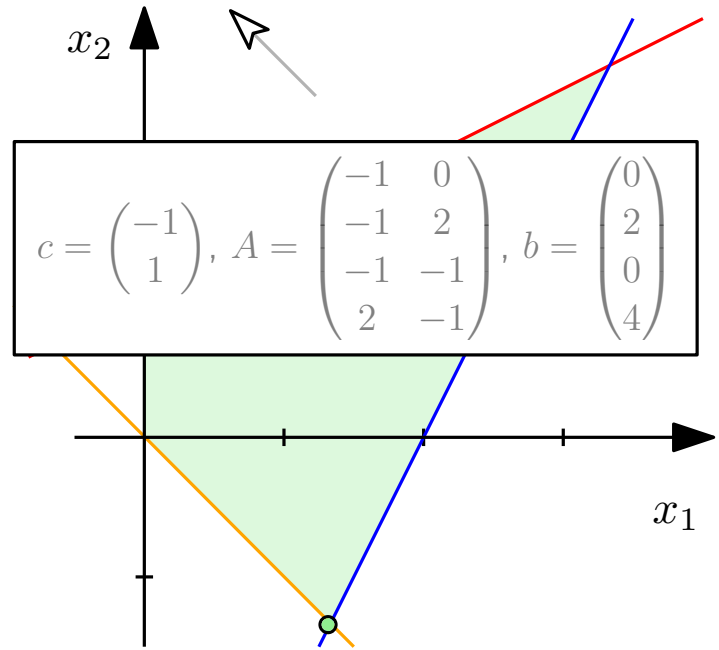
$x \in \mathbb{R}^d$ un vecteur d'indéterminées

$c \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$ des constantes.

$D_i \overset{\text{def}}{=} \{x : (Ax)_i \leq b_i\}$ un demi-espace de $\mathbb{R}^d$.

Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



Une forme générale

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{t. q.} & Ax \leq b \end{array}$$

$x \in \mathbb{R}^d$ un vecteur d'indéterminées

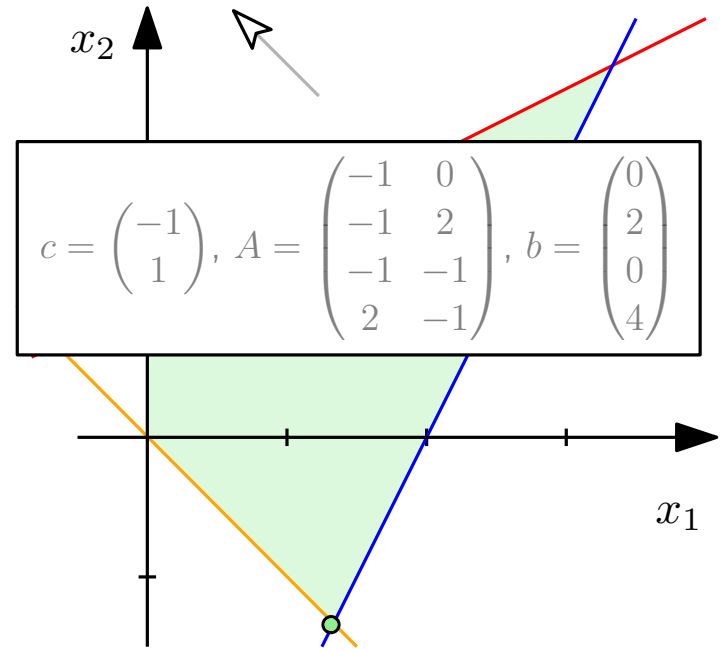
$c \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$ des constantes.

$D_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (Ax)_i \leq b_i\}$ un demi-espace de $\mathbb{R}^d$.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$

Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



Une forme générale

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{t. q.} & Ax \leq b \end{array}$$

$x \in \mathbb{R}^d$ un vecteur d'indéterminées

$c \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$ des constantes.

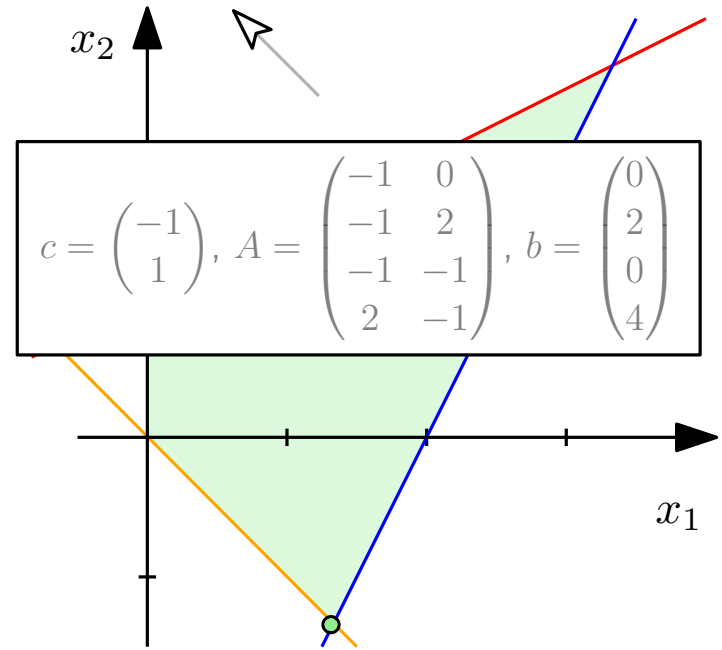
$D_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (Ax)_i \leq b_i\}$ un demi-espace de $\mathbb{R}^d$.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$

(PL) est faisable $\Leftrightarrow$ $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



Une forme générale

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{t. q.} & Ax \leq b \end{array}$$

$x \in \mathbb{R}^d$ un vecteur d'indéterminées

$c \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$ des constantes.

$D_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (Ax)_i \leq b_i\}$ un demi-espace de $\mathbb{R}^d$.

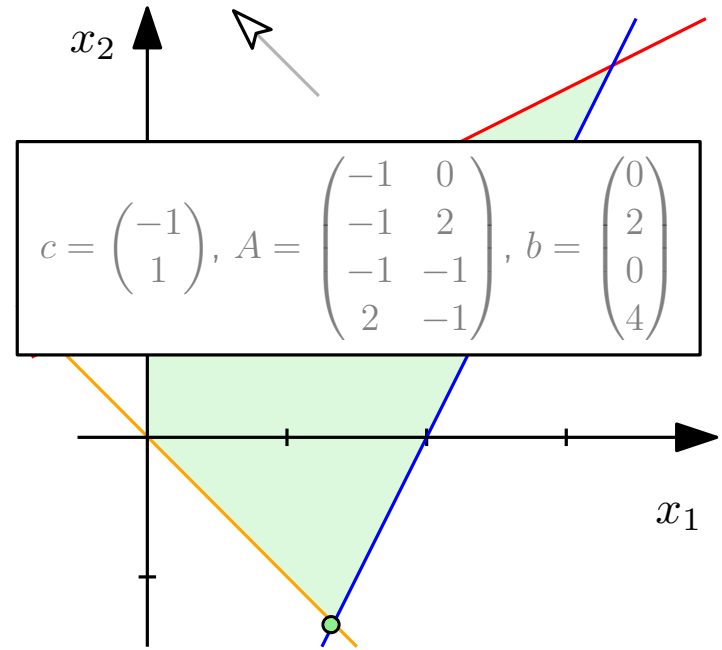
$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$

(PL) est faisable $\Leftrightarrow$ $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Valeur de (PL) $\leq t$ $\Leftrightarrow$ $\cap (\mathcal{F} \cup \{h_t\}) \neq \emptyset$ avec $h_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x \leq t\}$.

Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à minimiser **sur** $\mathbb{R}^d$ une fonction **linéaire** sous des contraintes **linéaires**.

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 - x_1 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



Une forme générale

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{t. q.} & Ax \leq b \end{array}$$

$x \in \mathbb{R}^d$ un vecteur d'indéterminées

$c \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$ des constantes.

$D_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (Ax)_i \leq b_i\}$ un demi-espace de $\mathbb{R}^d$. $\quad \mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$

$$\begin{array}{rcl} \text{(PL) est faisable} & \Leftrightarrow & \cap \mathcal{F} \neq \emptyset. \\ \text{Valeur de (PL)} \leq t & \Leftrightarrow & \cap (\mathcal{F} \cup \{h_t\}) \neq \emptyset \text{ avec } h_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x \ : \ c^T x \leq t\}. \\ \text{Valeur de (PL)} & = & \min \{t \ : \ \cap (\mathcal{F} \cup \{h_t\}) \neq \emptyset\} \end{array}$$

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$$\min_{x \in \cap \mathcal{F}} \quad c^T x$$

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$$\min_{x \in \cap \mathcal{F}} \quad c^T x$$

Deux hypothèses "simplificatrices"

Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$

Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\qquad \min_{x \in \cap \mathcal{F}} \quad c^T x$

Deux hypothèses "simplificatrices"

Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\quad \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ $\qquad$ Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

On va travailler sur des sous-programmes :

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$$

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\qquad \min_{x \in \cap \mathcal{F}} \quad c^T x \quad = \quad \text{val}(\mathcal{F}).$

Deux hypothèses "simplificatrices"

Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\quad \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ $\qquad$ Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

On va travailler sur des sous-programmes :

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$$

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\qquad \min_{x \in \cap \mathcal{F}} \quad c^T x \quad = \quad \text{val}(\mathcal{F}).$

Deux hypothèses "simplificatrices"

Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\quad \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ $\qquad$ Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

On va travailler sur des sous-programmes :

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\qquad \forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \text{val}(\mathcal{R}) \leq \text{val}(\mathcal{F}).$

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \min_{x \in \cap \mathcal{F}} \; c^T x \;=\; \mathrm{val}(\mathcal{F}).$

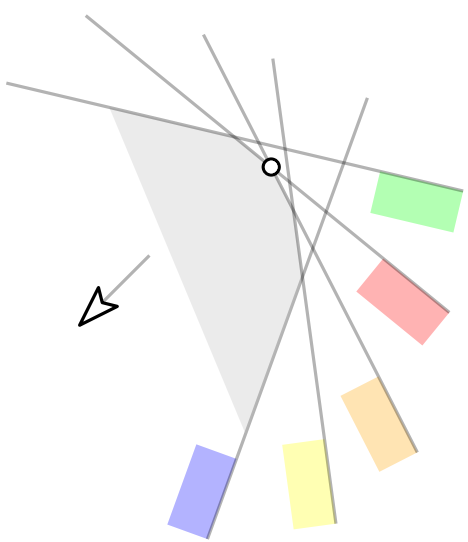
Deux hypothèses "simplificatrices"

Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ $\qquad$ Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

On va travailler sur des sous-programmes :

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\qquad \forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{val}(\mathcal{F}).$

Lemme. Il existe $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{F})$.



$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$$\min_{x \in \cap \mathcal{F}} \quad c^T x \quad = \quad \mathrm{val}(\mathcal{F}).$$

Deux hypothèses "simplificatrices"

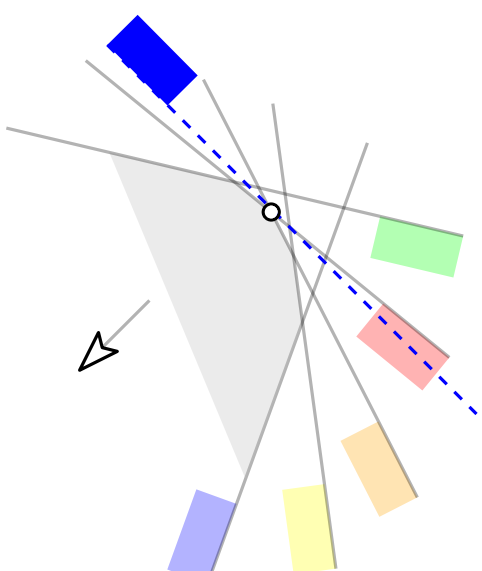
Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$

Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

On va travailler sur des sous-programmes :

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$$

$$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{val}(\mathcal{F}).$$



Lemme. Il existe $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x < \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ est un demi-espace ouvert.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$$\min_{x \in \cap \mathcal{F}} \quad c^T x \quad = \quad \mathrm{val}(\mathcal{F}).$$

Deux hypothèses "simplificatrices"

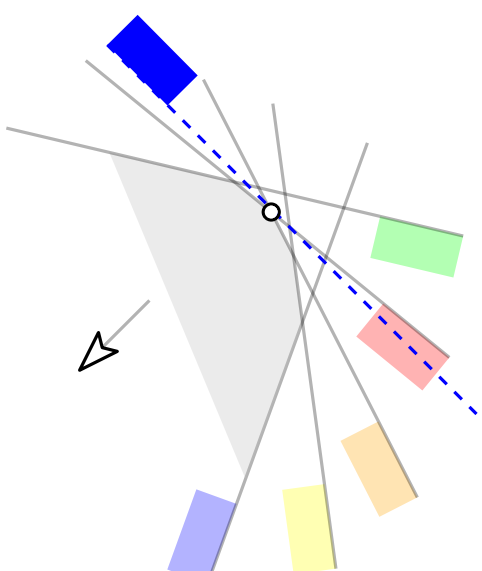
Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$

Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

On va travailler sur des sous-programmes :

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$$

$$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{val}(\mathcal{F}).$$



Lemme. Il existe $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x < \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ est un demi-espace ouvert.

$\mathcal{F} \cup \{h\}$ est d'intersection vide.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$$\min_{x \in \cap \mathcal{F}} \quad c^T x \quad = \quad \mathrm{val}(\mathcal{F}).$$

Deux hypothèses "simplificatrices"

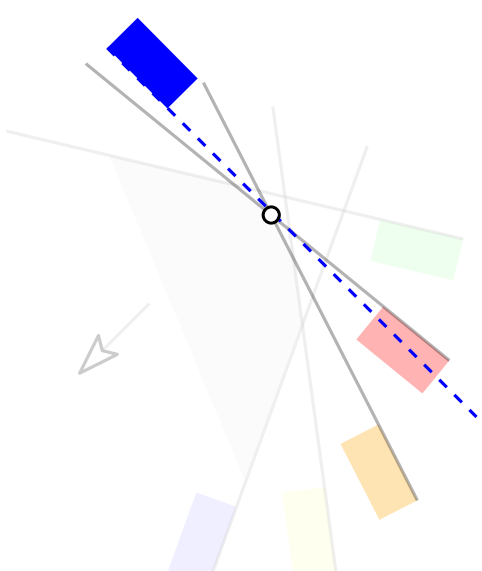
Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$

Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

On va travailler sur des sous-programmes :

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$$

$$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{val}(\mathcal{F}).$$



Lemme. Il existe $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x < \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ est un demi-espace ouvert.

$\mathcal{F} \cup \{h\}$ est d'intersection vide.

Helly $\Rightarrow \exists \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{F}$ t. q. $|\mathcal{R}'| \leq d+1$ et $\cap \mathcal{R}' = \emptyset$.

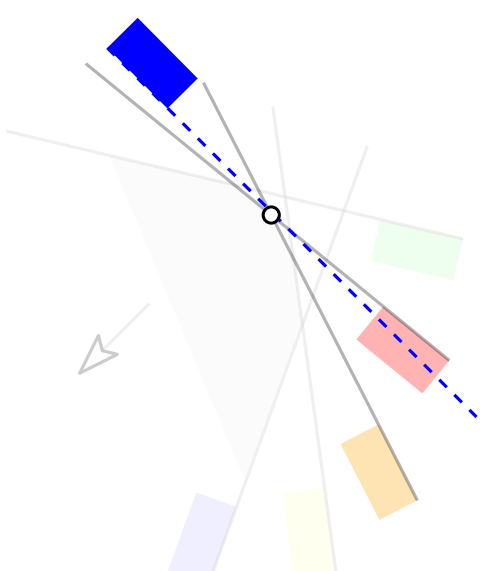
$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \min_{x \in \cap\mathcal{F}} \; c^T x \;=\; \mathrm{val}(\mathcal{F}).$

Deux hypothèses "simplificatrices"

Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$ $\qquad$ Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

On va travailler sur des sous-programmes :

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap\mathcal{R}} c^T x$ $\qquad$ $\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{val}(\mathcal{F}).$



Lemme. Il existe $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x < \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ est un demi-espace ouvert.

$\mathcal{F} \cup \{h\}$ est d'intersection vide.

Helly $\Rightarrow \exists \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{F}$ t. q. $|\mathcal{R}'| \leq d+1$ et $\cap\mathcal{R}' = \emptyset$.

$h \in \mathcal{R}'$. Posons $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}' \setminus \{h\}$.

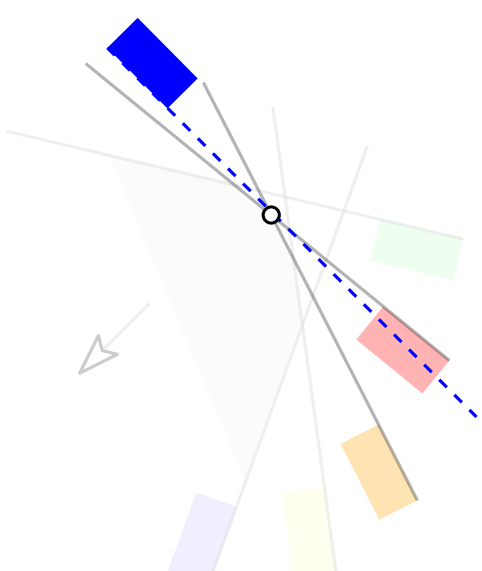
$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \min_{x \in \cap\mathcal{F}} \; c^T x \;=\; \mathrm{val}(\mathcal{F}).$

Deux hypothèses "simplificatrices"

Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$ $\qquad$ Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

On va travailler sur des sous-programmes :

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap\mathcal{R}} c^T x$ $\qquad$ $\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{val}(\mathcal{F}).$



Lemme. Il existe $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x < \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ est un demi-espace ouvert.

$\mathcal{F} \cup \{h\}$ est d'intersection vide.

Helly $\Rightarrow \exists \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{F}$ t. q. $|\mathcal{R}'| \leq d+1$ et $\cap\mathcal{R}' = \emptyset$.

$h \in \mathcal{R}'$. Posons $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}' \setminus \{h\}$.

$\cap\mathcal{R}$ disjoint de $h \Rightarrow \mathrm{val}(\mathcal{R}) \geq \mathrm{val}(\mathcal{F})$.

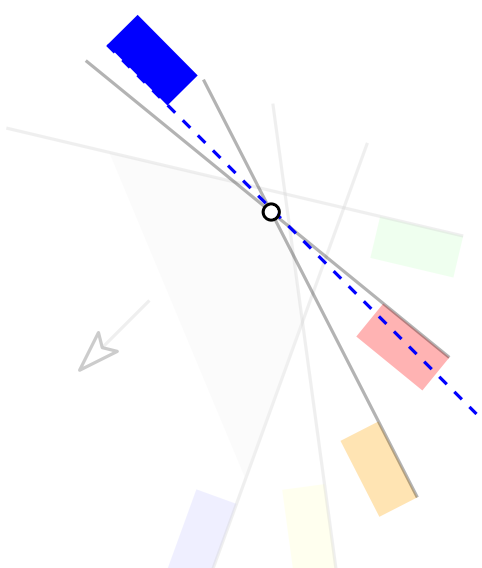
$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\qquad \min_{x \in \cap\mathcal{F}} \; c^T x \;=\; \mathrm{val}(\mathcal{F}).$

Deux hypothèses "simplificatrices"

Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$ $\qquad$ Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

On va travailler sur des sous-programmes :

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap\mathcal{R}} c^T x$ $\qquad \forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{val}(\mathcal{F}).$



Lemme. Il existe $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x < \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ est un demi-espace ouvert.

$\mathcal{F} \cup \{h\}$ est d'intersection vide.

Helly $\Rightarrow \exists \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{F}$ t. q. $|\mathcal{R}'| \leq d+1$ et $\cap\mathcal{R}' = \emptyset$.

$h \in \mathcal{R}'$. Posons $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}' \setminus \{h\}$.

$\cap\mathcal{R}$ disjoint de $h \Rightarrow \mathrm{val}(\mathcal{R}) \geq \mathrm{val}(\mathcal{F})$. $\square$

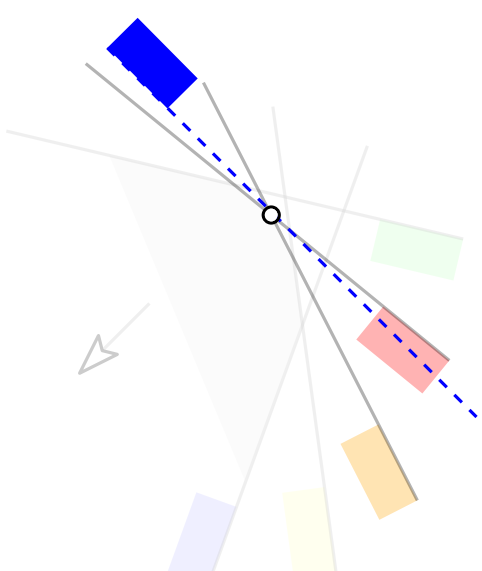
$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \min_{x \in \cap\mathcal{F}} \; c^T x \;=\; \mathrm{val}(\mathcal{F}).$

Deux hypothèses "simplificatrices"

Faisable $\stackrel{\text{def}}{:}$ $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$ $\qquad$ Générique $\stackrel{\text{def}}{:}$ L'optimum est unique.

On va travailler sur des sous-programmes :

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap\mathcal{R}} c^T x$ $\qquad$ $\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{val}(\mathcal{F}).$



Lemme. Il existe $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x < \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ est un demi-espace ouvert.

$\mathcal{F} \cup \{h\}$ est d'intersection vide.

Helly $\Rightarrow \exists \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{F}$ t. q. $|\mathcal{R}'| \leq d+1$ et $\cap\mathcal{R}' = \emptyset$.

$h \in \mathcal{R}'$. Posons $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}' \setminus \{h\}$.

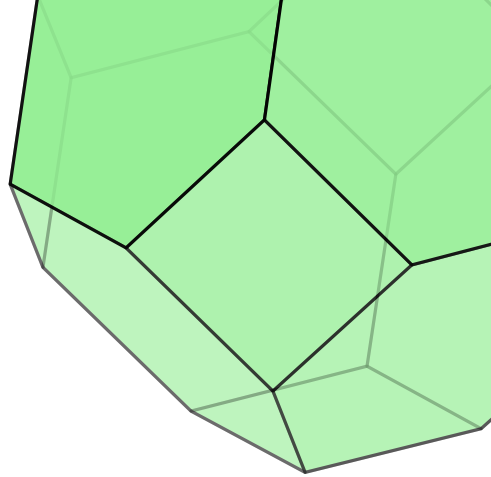
$\cap\mathcal{R}$ disjoint de $h \Rightarrow \mathrm{val}(\mathcal{R}) \geq \mathrm{val}(\mathcal{F})$. $\square$

Si le PL est infaisable, il faut chercher $\mathcal{R}$ dans $\binom{\mathcal{F}}{d+1}$.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

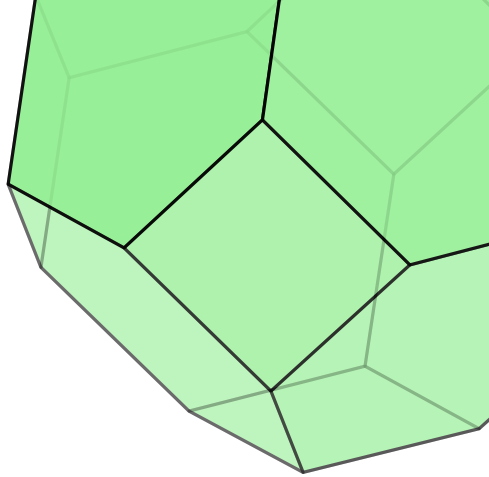
On cherche $\min_{x \in \cap \mathcal{F}} c^T x = \text{val}(\mathcal{F})$.



$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\min_{x \in \cap \mathcal{F}} c^T x = \text{val}(\mathcal{F})$.



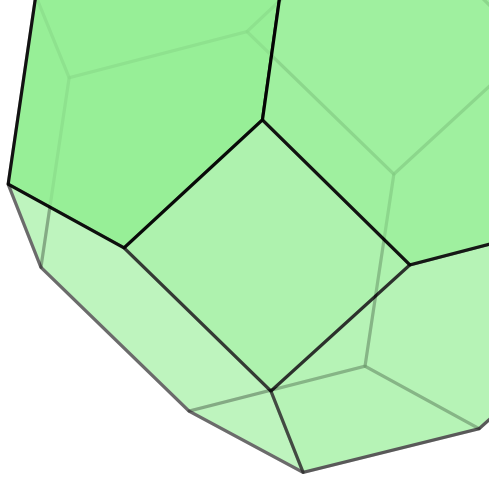
Quand #contraintes $\gg$ # variables, la plupart des contraintes sont inutiles :

Lemme. Il existe $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{F})$.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\min_{x \in \cap \mathcal{F}} c^T x = \text{val}(\mathcal{F})$.



Quand #contraintes $\gg$ # variables, la plupart des contraintes sont inutiles :

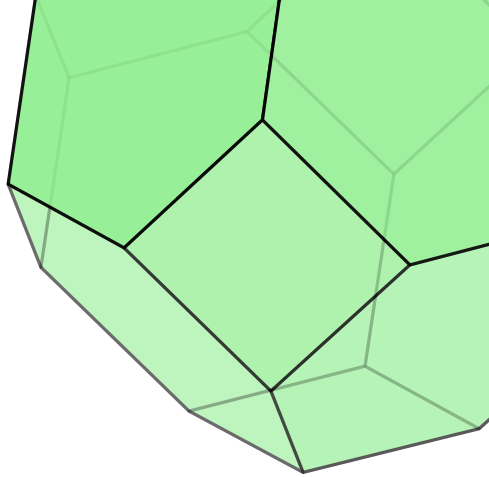
Lemme. Il existe $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{F})$.

Quelle information peut-on tirer de petits $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoires ?

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\min_{x \in \cap \mathcal{F}} c^T x = \text{val}(\mathcal{F})$.



Quand #contraintes $\gg$ # variables, la plupart des contraintes sont inutiles :

Lemme. Il existe $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{F})$.

Quelle information peut-on tirer de petits $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoires ?

Deux intérêts : Comprendre le problème de PL (algorithme fortement polynomial ?)

Généralisables à des problèmes de type PL.

1er algorithme

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad$ $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Fixons $v \in \mathbb{R}$ et testons si $\mathrm{val}(\mathcal{F}) \leq v$.

Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Fixons $v \in \mathbb{R}$ et testons si $\mathrm{val}(\mathcal{F}) \leq v$.

Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`.

Cette réponse est toujours correcte.

$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{val}(\mathcal{F}).$

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Fixons $v \in \mathbb{R}$ et testons si $\mathrm{val}(\mathcal{F}) \leq v$.

Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`.

Cette réponse est toujours correcte.

$$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{val}(\mathcal{F}).$$

Cette réponse peut être fausse.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Fixons $v \in \mathbb{R}$ et testons si $\mathrm{val}(\mathcal{F}) \leq v$.

Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`.

Cette réponse est toujours correcte.

$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{val}(\mathcal{F}).$

Cette réponse peut être fausse.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{F}) > v$, l'algorithme a une probabilité > 0 de répondre `NON`. $\quad \exists \mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}, \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{F}).$

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

Fixons $v \in \mathbb{R}$ et testons si $\text{val}(\mathcal{F}) \leq v$.

Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\text{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`.

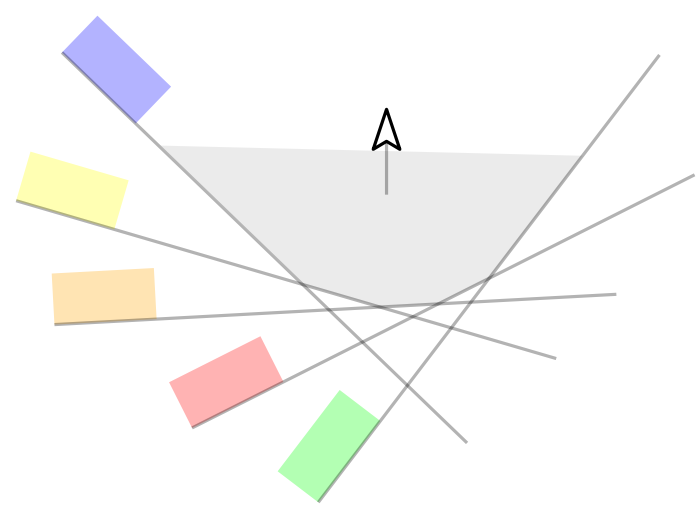
Cette réponse est toujours correcte.

$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \text{val}(\mathcal{R}) \leq \text{val}(\mathcal{F}).$

Cette réponse peut être fausse.

Si $\text{val}(\mathcal{F}) > v$, l'algorithme a une probabilité > 0 de répondre `NON`. $\quad \exists \mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}, \quad \text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{F}).$

Helly fractionnaire relie la probabilité de réussite
au nombre minimum de contraintes à supprimer
pour que la valeur devienne $\leq v$.



$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

Fixons $v \in \mathbb{R}$ et testons si $\text{val}(\mathcal{F}) \leq v$.

Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\text{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`.

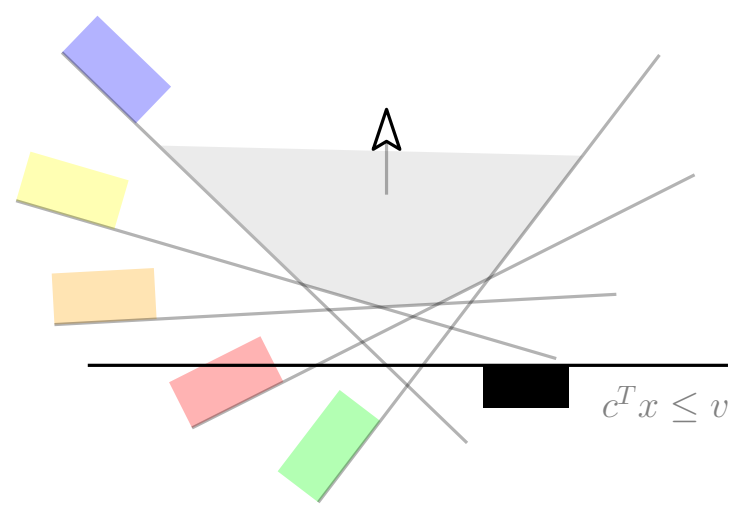
Cette réponse est toujours correcte.

$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \text{val}(\mathcal{R}) \leq \text{val}(\mathcal{F}).$

Cette réponse peut être fausse.

Si $\text{val}(\mathcal{F}) > v$, l'algorithme a une probabilité > 0 de répondre `NON`. $\quad \exists \mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}, \quad \text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{F}).$

Helly fractionnaire relie la probabilité de réussite
au nombre minimum de contraintes à supprimer
pour que la valeur devienne $\leq v$.



Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$
si tout point de $\{x \ : \ c^T x \leq v\}$ viole au moins ϵn contraintes.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

Fixons $v \in \mathbb{R}$ et testons si $\text{val}(\mathcal{F}) \leq v$.

Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\text{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`.

Cette réponse est toujours correcte.

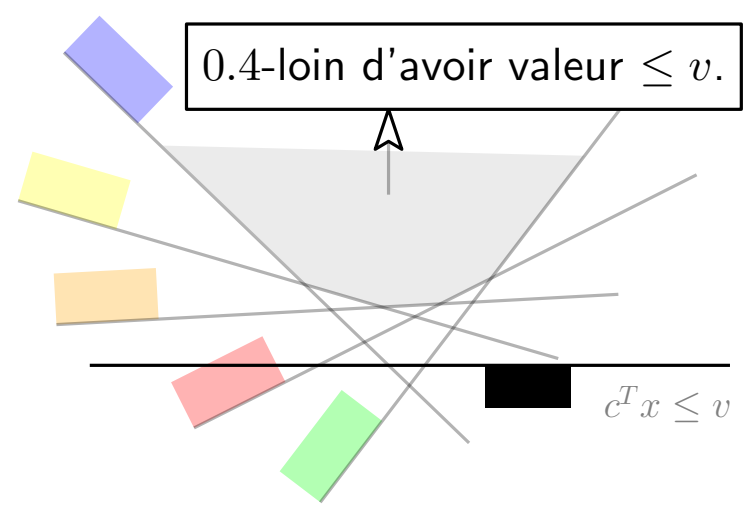
$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}, \quad \text{val}(\mathcal{R}) \leq \text{val}(\mathcal{F}).$

Cette réponse peut être fausse.

Si $\text{val}(\mathcal{F}) > v$, l'algorithme a une probabilité > 0 de répondre `NON`. $\quad \exists \mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}, \quad \text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{F}).$

Helly fractionnaire relie la probabilité de réussite
au nombre minimum de contraintes à supprimer
pour que la valeur devienne $\leq v$.

Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$
si tout point de $\{x \ : \ c^T x \leq v\}$ viole au moins ϵn contraintes.



Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`.

Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`. ← Probabilité d'erreur ?

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α des $X \in \binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$ si il faut supprimer une fraction $\geq \epsilon$ de ses contraintes pour que le programme restant ait valeur $\leq v$.

Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`. ← Probabilité d'erreur ?

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α des $X \in \binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$ si il faut supprimer une fraction $\geq \epsilon$ de ses contraintes pour que le programme restant ait valeur $\leq v$.

Proposition. Si le PL est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$, la probabilité d'erreur est $\leq 1/3$ pour $k \geq \frac{-\log 3}{1-\log(\epsilon^{d+1})}$.

Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`. ← Probabilité d'erreur ?

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α des $X \in \binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$ si il faut supprimer une fraction $\geq \epsilon$ de ses contraintes pour que le programme restant ait valeur $\leq v$.

Proposition. Si le PL est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$, la probabilité d'erreur est $\leq 1/3$ pour $k \geq \frac{-\log 3}{1-\log(\epsilon^{d+1})}$.

réponse `OUI` : correcte

réponse `NON` : correcte avec $\Pr \geq 2/3$.

« ϵ-testeur »

Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`. ← Probabilité d'erreur ?

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α des $X \in \binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$ si il faut supprimer une fraction $\geq \epsilon$ de ses contraintes pour que le programme restant ait valeur $\leq v$.

Proposition. Si le PL est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$, la probabilité d'erreur est $\leq 1/3$ pour $k \geq \frac{-\log 3}{1-\log(\epsilon^{d+1})}$.

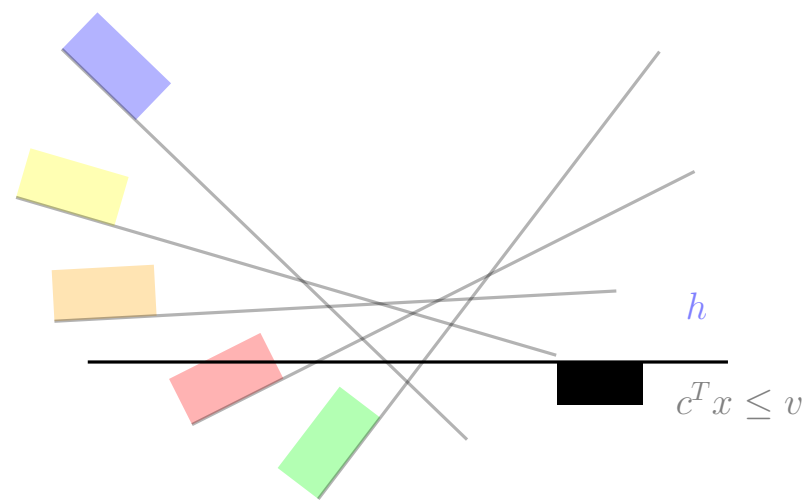
réponse `OUI` : correcte

réponse `NON` : correcte avec $\Pr \geq 2/3$.

« ϵ-testeur »

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x \,:\, c^T x > \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$



Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`. ← Probabilité d'erreur ?

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α des $X \in \binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1-(1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$ si il faut supprimer une fraction $\geq \epsilon$ de ses contraintes pour que le programme restant ait valeur $\leq v$.

Proposition. Si le PL est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$, la probabilité d'erreur est $\leq 1/3$ pour $k \geq \frac{-\log 3}{1-\log(\epsilon^{d+1})}$.

réponse `OUI` : correcte

réponse `NON` : correcte avec $\Pr \geq 2/3$.

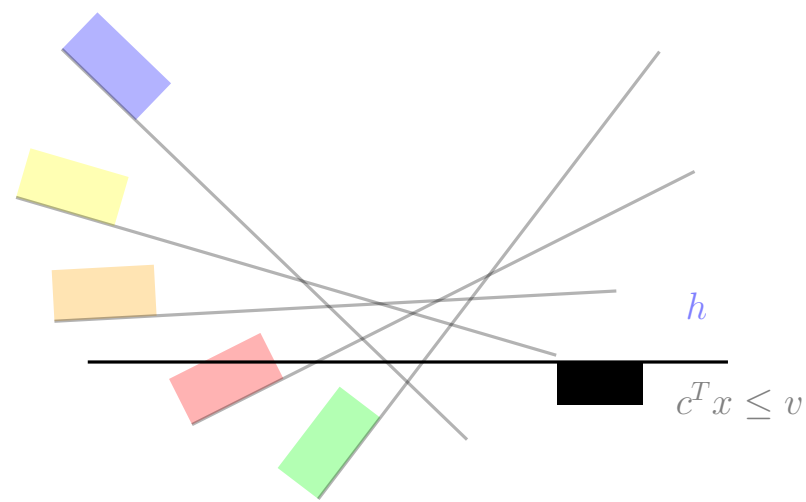
« ϵ-testeur »

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x > \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$

ϵ-loin $\Rightarrow$ tout "gros" $X \subseteq \mathcal{F}$ vérifie $(\cap X) \cap h = \emptyset$.

X gros $\Leftrightarrow |X| > (1-\epsilon)|\mathcal{F}|$.



Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`. ← Probabilité d'erreur ?

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α des $X \in \binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1-(1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$ si il faut supprimer une fraction $\geq \epsilon$ de ses contraintes pour que le programme restant ait valeur $\leq v$.

Proposition. Si le PL est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$, la probabilité d'erreur est $\leq 1/3$ pour $k \geq \frac{-\log 3}{1-\log(\epsilon^{d+1})}$.

réponse `OUI` : correcte

réponse `NON` : correcte avec $\Pr \geq 2/3$.

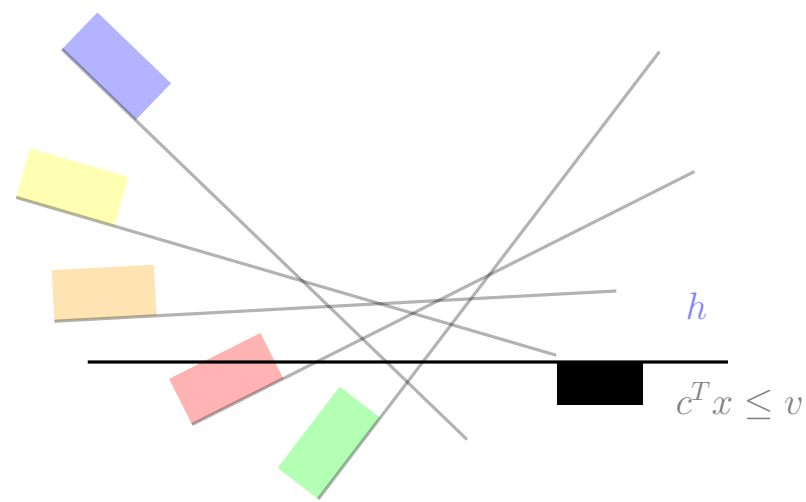
« ϵ-testeur »

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x > \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ $\quad \mathcal{F}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1 \cap h, D_2 \cap h, \ldots, D_n \cap h\}$

ϵ-loin $\Rightarrow$ tout "gros" $X \subseteq \mathcal{F}$ vérifie $(\cap X) \cap h = \emptyset$.

X gros $\Leftrightarrow |X| > (1-\epsilon)|\mathcal{F}|$.



Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`. ← Probabilité d'erreur ?

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α des $X \in \binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1-(1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$ si il faut supprimer une fraction $\geq \epsilon$ de ses contraintes pour que le programme restant ait valeur $\leq v$.

Proposition. Si le PL est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$, la probabilité d'erreur est $\leq 1/3$ pour $k \geq \frac{-\log 3}{1-\log(\epsilon^{d+1})}$.

réponse `OUI` : correcte

réponse `NON` : correcte avec $\Pr \geq 2/3$.

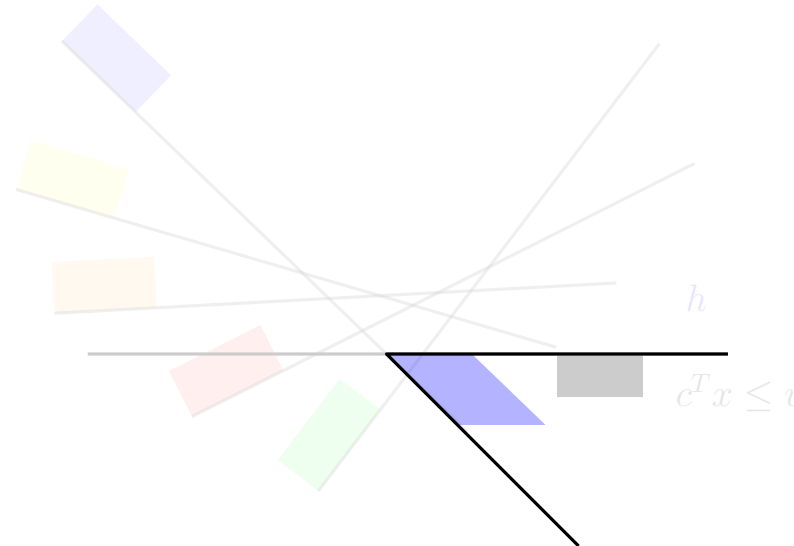
« ϵ-testeur »

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x > \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ $\quad \mathcal{F}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1 \cap h, D_2 \cap h, \ldots, D_n \cap h\}$

ϵ-loin $\Rightarrow$ tout "gros" $X \subseteq \mathcal{F}$ vérifie $(\cap X) \cap h = \emptyset$.

X gros $\Leftrightarrow |X| > (1-\epsilon)|\mathcal{F}|$.



Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`. ← Probabilité d'erreur ?

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α des $X \in \binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1-(1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$ si il faut supprimer une fraction $\geq \epsilon$ de ses contraintes pour que le programme restant ait valeur $\leq v$.

Proposition. Si le PL est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$, la probabilité d'erreur est $\leq 1/3$ pour $k \geq \frac{-\log 3}{1-\log(\epsilon^{d+1})}$.

réponse `OUI` : correcte

réponse `NON` : correcte avec $\Pr \geq 2/3$.

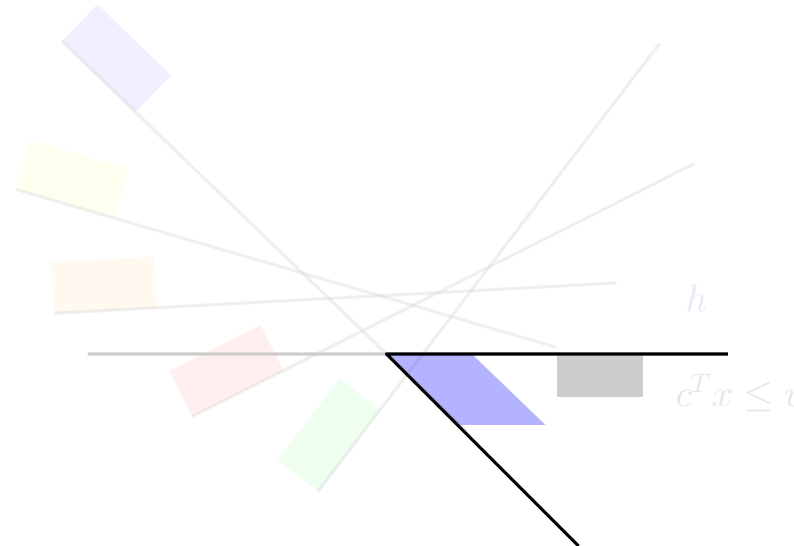
« ϵ-testeur »

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x > \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ $\quad \mathcal{F}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1 \cap h, D_2 \cap h, \ldots, D_n \cap h\}$

ϵ-loin $\Rightarrow$ tout "gros" $X \subseteq \mathcal{F}_h$ vérifie $\cap X = \emptyset$.

X gros $\Leftrightarrow |X| > (1-\epsilon)|\mathcal{F}|$.



Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`. ← Probabilité d'erreur ?

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α des $X \in \binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1-(1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$ si il faut supprimer une fraction $\geq \epsilon$ de ses contraintes pour que le programme restant ait valeur $\leq v$.

Proposition. Si le PL est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$, la probabilité d'erreur est $\leq 1/3$ pour $k \geq \frac{-\log 3}{1-\log(\epsilon^{d+1})}$.

réponse `OUI` : correcte

réponse `NON` : correcte avec $\Pr \geq 2/3$.

« ϵ-testeur »

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x > \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ $\quad \mathcal{F}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1 \cap h, D_2 \cap h, \ldots, D_n \cap h\}$

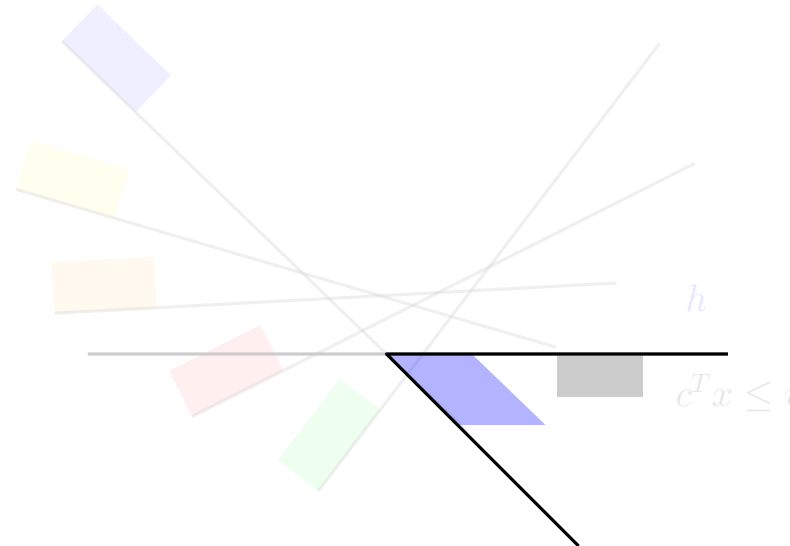
ϵ-loin $\Rightarrow$ tout "gros" $X \subseteq \mathcal{F}_h$ vérifie $\cap X = \emptyset$.

X gros $\Leftrightarrow |X| > (1-\epsilon)|\mathcal{F}|$.

$\Rightarrow$ la fraction α des $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tels que $\cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ est majorée.

$\alpha \leq 1 - \epsilon^{d+1}$

On ajuste k pour que $\alpha^k \leq 1/3$.



Répéter k fois :

Choisir $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ uniformément au hasard.

Si $\mathrm{val}(\mathcal{R}) > v$ répondre `NON`.

Répondre `OUI`. ← Probabilité d'erreur ?

Helly fractionnaire. $\forall \alpha > 0$ et $d \geq 1$, pour toute famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^d$, si une fraction α des $X \in \binom{\mathcal{F}}{d+1}$ sont d'intersection non vide, alors une fraction $1-(1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$ de $\mathcal{F}$ a un point en commun.

Un programme linéaire est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$ si il faut supprimer une fraction $\geq \epsilon$ de ses contraintes pour que le programme restant ait valeur $\leq v$.

Proposition. Si le PL est ϵ-loin d'avoir valeur $\leq v$, la probabilité d'erreur est $\leq 1/3$ pour $k \geq \frac{-\log 3}{1-\log(\epsilon^{d+1})}$.

réponse `OUI` : correcte

réponse `NON` : correcte avec $\Pr \geq 2/3$.

« ϵ-testeur »

Preuve

$h \stackrel{\text{def}}{=} \{x : c^T x > \mathrm{val}(\mathcal{F})\}$ $\quad \mathcal{F}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1 \cap h, D_2 \cap h, \ldots, D_n \cap h\}$

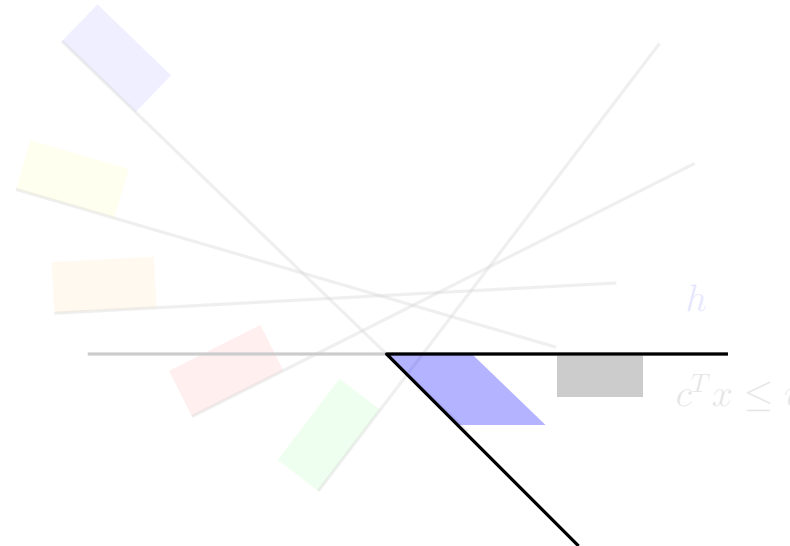
ϵ-loin $\Rightarrow$ tout "gros" $X \subseteq \mathcal{F}_h$ vérifie $\cap X = \emptyset$.

X gros $\Leftrightarrow |X| > (1-\epsilon)|\mathcal{F}|$.

$\Rightarrow$ la fraction α des $\mathcal{R} \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tels que $\cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ est majorée.

$\alpha \leq 1 - \epsilon^{d+1}$

On ajuste k pour que $\alpha^k \leq 1/3$. $\square$

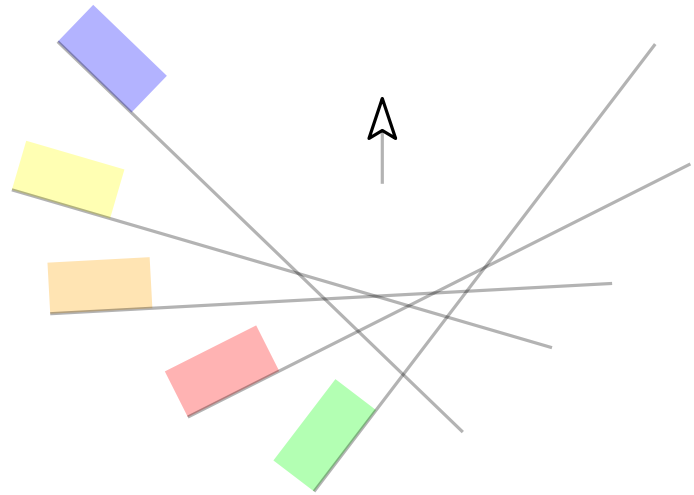


2nd algorithme

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad$ $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\mathrm{val}(\mathcal{F})$.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad$ $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

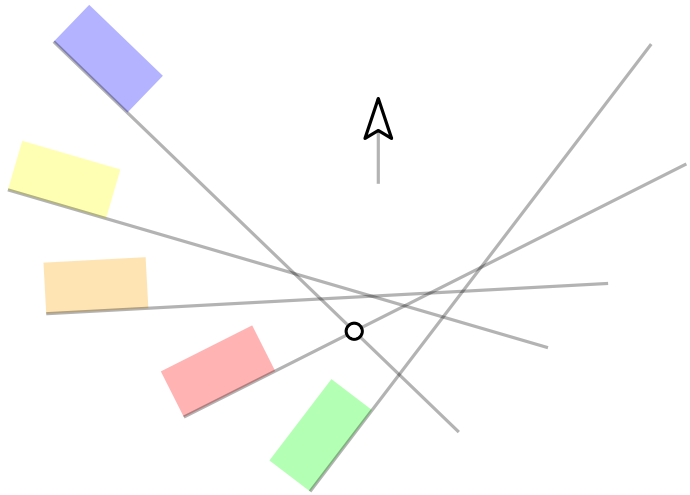
Associons à $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble $V(\mathcal{R})$ des contraintes violées par $\text{argmin}_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$.



$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad$ $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

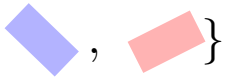
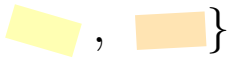
Associons à $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble $V(\mathcal{R})$ des contraintes violées par $\text{argmin}_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$.

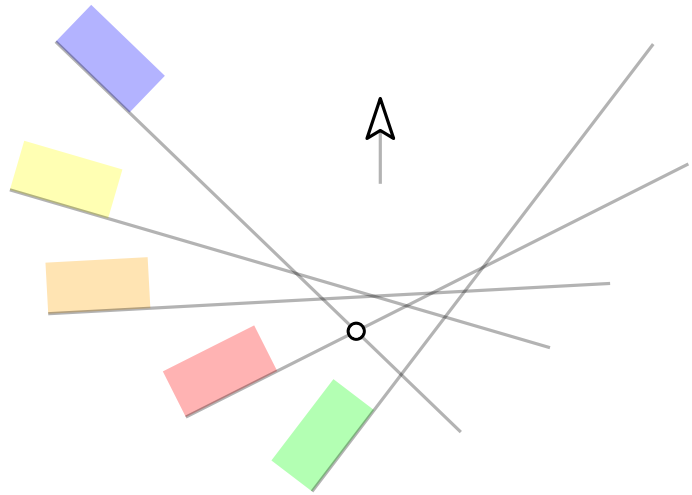
$\mathcal{R} = \{$, $\}$



$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad$ $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

Associons à $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble $V(\mathcal{R})$ des contraintes violées par $\text{argmin}_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$.

$\mathcal{R} = \{$  $\}$ $\qquad$ $V(\mathcal{R}) = \{$  $\}$

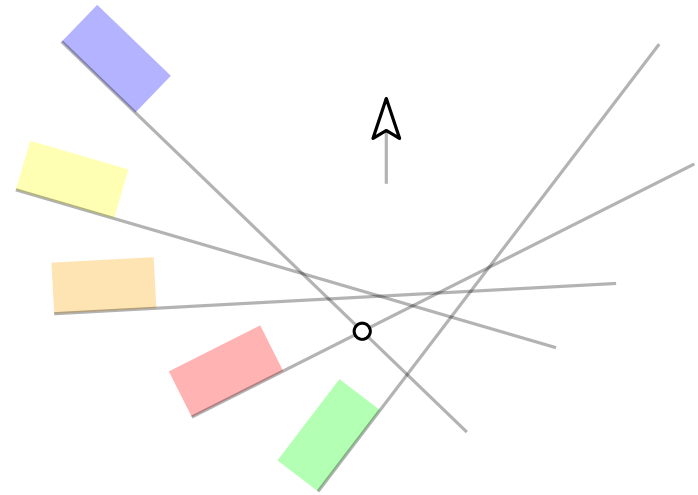


$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ On cherche $\mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Associons à $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble $V(\mathcal{R})$ des contraintes violées par $\mathrm{argmin}_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$.

$\mathcal{R} = \{$ $,$ $\}$ $\qquad V(\mathcal{R}) = \{$ $,$ $\}$

$V(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \mathrm{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \mathrm{val}(\mathcal{R})\}.$

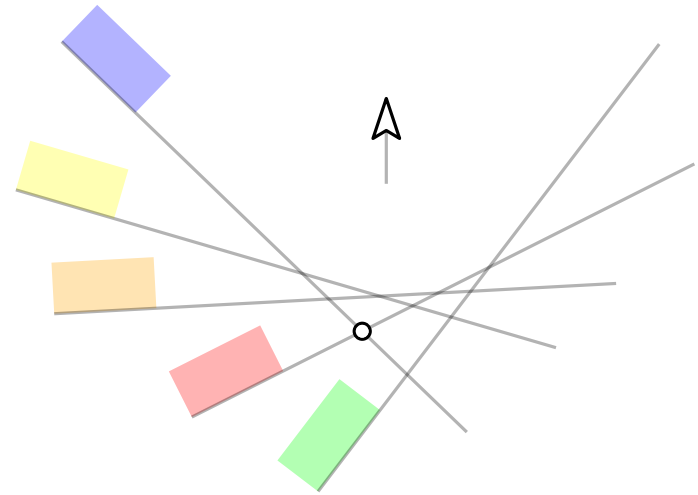


$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ On cherche $\mathrm{val}(\mathcal{F})$.

Associons à $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble $V(\mathcal{R})$ des contraintes violées par $\mathrm{argmin}_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$.

$\mathcal{R} = \{$ $\}$ $\qquad$ $V(\mathcal{R}) = \{$ $\}$

$V(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \mathrm{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \mathrm{val}(\mathcal{R})\}.$



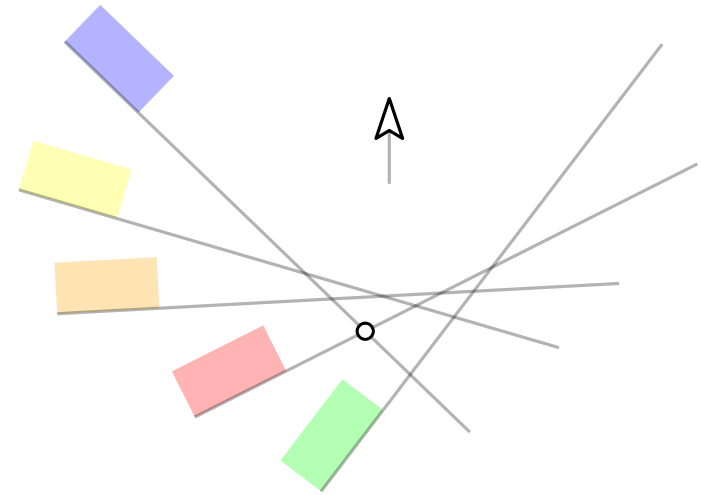
$\mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

Associons à $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble $V(\mathcal{R})$ des contraintes violées par $\text{argmin}_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$.

$\mathcal{R} = \{$ $,$ $\}$ $\qquad$ $V(\mathcal{R}) = \{$ $,$ $\}$

$V(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}.$



$\text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

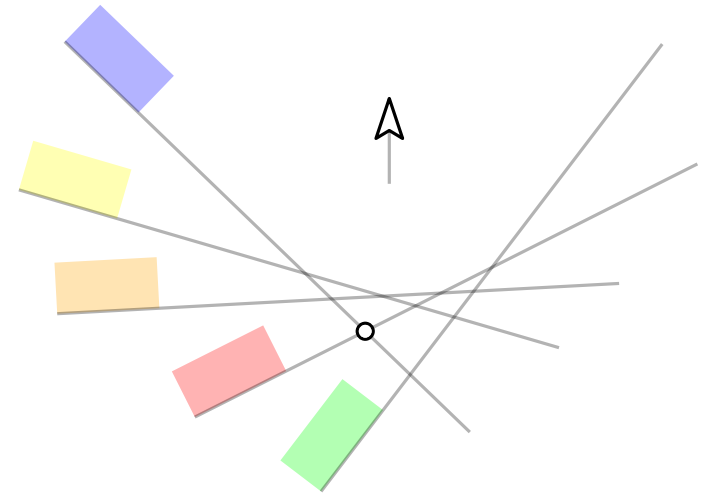
0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \stackrel{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

Associons à $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble $V(\mathcal{R})$ des contraintes violées par $\text{argmin}_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$.

$\mathcal{R} = \{$ $,$ $\}$ $\qquad$ $V(\mathcal{R}) = \{$ $,$ $\}$

$V(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}.$



$\text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \stackrel{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

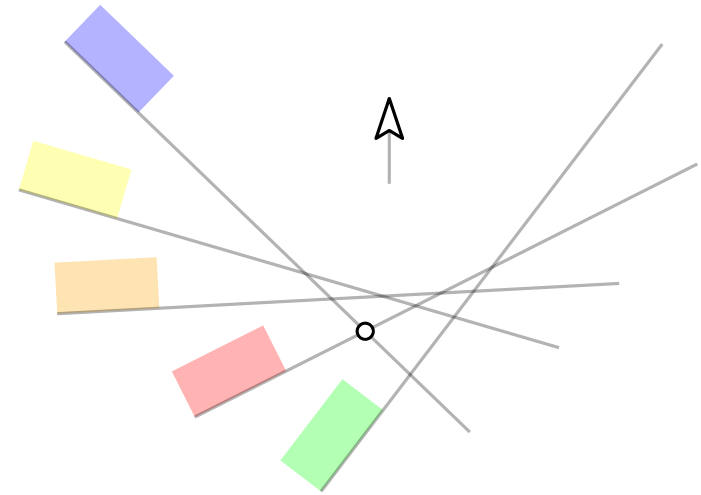
$r \stackrel{\text{def}}{=} 4d^2$

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

Associons à $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble $V(\mathcal{R})$ des contraintes violées par $\text{argmin}_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$.

$\mathcal{R} = \{$ $\}$ $\qquad$ $V(\mathcal{R}) = \{$ $\}$

$V(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}.$



$\text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \stackrel{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

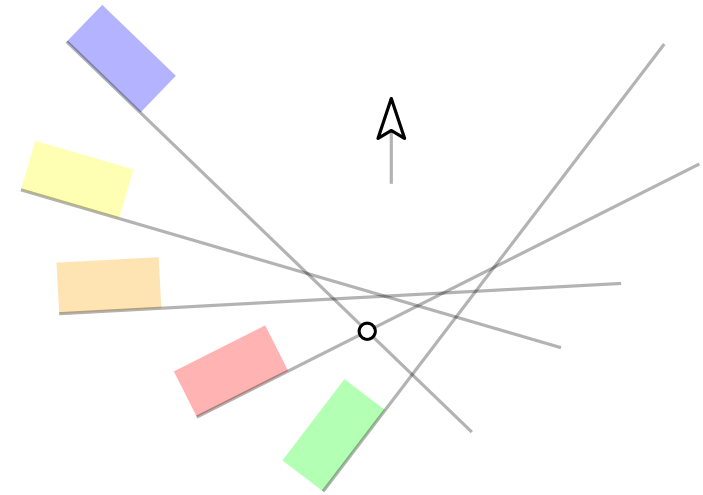
$r \stackrel{\text{def}}{=} 4d^2$ $\qquad$ $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2d}$

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

Associons à $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble $V(\mathcal{R})$ des contraintes violées par $\text{argmin}_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$.

$\mathcal{R} = \{$ $\}$ $\qquad$ $V(\mathcal{R}) = \{$ $\}$

$V(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}.$



$\text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \stackrel{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$r \stackrel{\text{def}}{=} 4d^2$ $\qquad$ $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2d}$

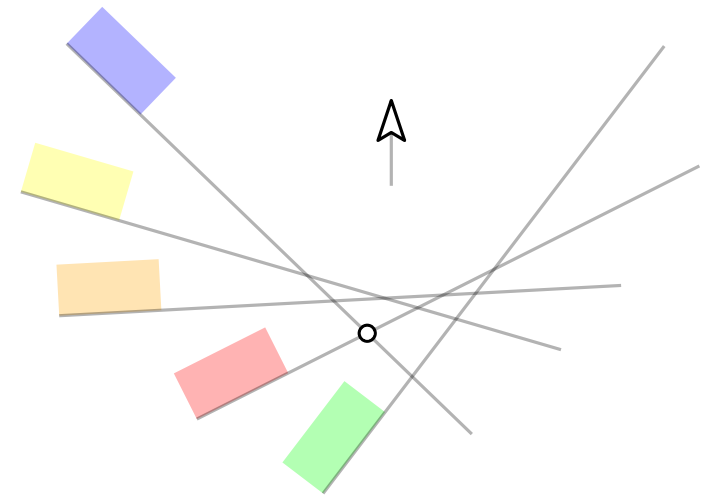
Correct si il termine.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$ $\quad$ On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

Associons à $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble $V(\mathcal{R})$ des contraintes violées par $\text{argmin}_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$.

$\mathcal{R} = \{$ $,$ $\}$ $\qquad$ $V(\mathcal{R}) = \{$ $,$ $\}$

$V(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}.$



$\text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \stackrel{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$r \stackrel{\text{def}}{=} 4d^2$ $\qquad$ $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2d}$

Correct si il termine.

Il termine très probablement en $4d \log n$ rounds.

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \stackrel{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w\left(V(\mathcal{R})\right) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}.$

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \overset{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w\left(V(\mathcal{R})\right) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\mathrm{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \mathrm{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \mathrm{val}(\mathcal{R})\}.$

Rappel. Il existe $\mathcal{R}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\mathrm{val}(\mathcal{R}_0) = \mathrm{val}(\mathcal{F})$.

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \overset{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}$.

Rappel. Il existe $\mathcal{R}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\text{val}(\mathcal{R}_0) = \text{val}(\mathcal{F})$.

$$\text{val}(\mathcal{F}) \geq \text{val}(\mathcal{R})$$

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \overset{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w\left(V(\mathcal{R})\right) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\mathrm{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \mathrm{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \mathrm{val}(\mathcal{R})\}.$

Rappel. Il existe $\mathcal{R}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\mathrm{val}(\mathcal{R}_0) = \mathrm{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}_0 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathrm{val}(\mathcal{F}) \geq \mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_0)$

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \overset{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}$.

Rappel. Il existe $\mathcal{R}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\text{val}(\mathcal{R}_0) = \text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}_0 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{val}(\mathcal{F}) \geq \text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_0) \geq \text{val}(\mathcal{R}_0)$

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \overset{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}$.

Rappel. Il existe $\mathcal{R}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\text{val}(\mathcal{R}_0) = \text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}_0 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{val}(\mathcal{F}) \geq \text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_0) \geq \text{val}(\mathcal{R}_0) \quad \Rightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

Tout ensemble de contraintes dont le poids double contient une contrainte de $\mathcal{R}_0$.

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \overset{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}.$

Rappel. Il existe $\mathcal{R}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\text{val}(\mathcal{R}_0) = \text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}_0 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{val}(\mathcal{F}) \geq \text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_0) \geq \text{val}(\mathcal{R}_0) \quad \Rightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

Tout ensemble de contraintes dont le poids double contient une contrainte de $\mathcal{R}_0$.

Après k repondérations. : $\qquad w(\mathcal{F}) \leq n(1+\alpha)^k$

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \overset{\text{def}}{=} 1$.
1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.
2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.
3. Si $w\left(V(\mathcal{R})\right) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.
4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \mathrm{val}(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\mathrm{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \overset{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \mathrm{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \mathrm{val}(\mathcal{R})\}.$

Rappel. Il existe $\mathcal{R}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\mathrm{val}(\mathcal{R}_0) = \mathrm{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}_0 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathrm{val}(\mathcal{F}) \geq \mathrm{val}(\mathcal{R}) = \mathrm{val}(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_0) \geq \mathrm{val}(\mathcal{R}_0) \quad \Rightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

Tout ensemble de contraintes dont le poids double contient une contrainte de $\mathcal{R}_0$.

Après k repondérations. : $\quad w(\mathcal{F}) \leq n(1+\alpha)^k \quad$ et $\quad w(\mathcal{R}_0) \gtrsim d2^{\frac{k}{d}}$.

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.

2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.

3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.

4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}.$

Rappel. Il existe $\mathcal{R}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\text{val}(\mathcal{R}_0) = \text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}_0 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{val}(\mathcal{F}) \geq \text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_0) \geq \text{val}(\mathcal{R}_0) \quad \Rightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

Tout ensemble de contraintes dont le poids double contient une contrainte de $\mathcal{R}_0$.

Après k repondérations. : $\quad w(\mathcal{F}) \leq n(1+\alpha)^k \quad$ et $\quad w(\mathcal{R}_0) \gtrsim d 2^{\frac{k}{d}}$.

Pour $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2d}$ on a $1 + \alpha < 2^{\frac{1}{d}} \quad \Rightarrow \quad$ le nombre de passages par 4. possibles est borné.

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.

2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.

3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.

4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}.$

Rappel. Il existe $\mathcal{R}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\text{val}(\mathcal{R}_0) = \text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}_0 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{val}(\mathcal{F}) \geq \text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_0) \geq \text{val}(\mathcal{R}_0) \quad \Rightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

Tout ensemble de contraintes dont le poids double contient une contrainte de $\mathcal{R}_0$.

Après k repondérations. : $\quad w(\mathcal{F}) \leq n(1+\alpha)^k \quad$ et $\quad w(\mathcal{R}_0) \gtrsim d 2^{\frac{k}{d}}$.

Pour $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2d}$ on a $1 + \alpha < 2^{\frac{1}{d}} \quad \Rightarrow \quad$ le nombre de passages par 4. possibles est borné.

Pour $r \stackrel{\text{def}}{=} 4d^2$ on a $\mathbb{P}\left[w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})\right] \leq \frac{1}{2}$.

0. Associer à chaque $D_i \in \mathcal{F}$ un poids $w_i \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

1. Choisir $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ aléatoire de taille r selon les poids $w_\bullet$.

2. Si $V(\mathcal{R}) = \emptyset$ terminer en retournant $\mathcal{R}$.

3. Si $w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})$ retourner en 1.

4. Doubler w_i pour chaque $D_i \in V(\mathcal{R})$ et retourner en 1.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \quad \mapsto \quad \text{val}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \cap \mathcal{R}} c^T x$

On cherche $\text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} : \ \text{val}(\mathcal{R} \cup \{h\}) \neq \text{val}(\mathcal{R})\}$.

Rappel. Il existe $\mathcal{R}_0 \in \binom{\mathcal{F}}{d}$ tel que $\text{val}(\mathcal{R}_0) = \text{val}(\mathcal{F})$.

$V(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}_0 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{val}(\mathcal{F}) \geq \text{val}(\mathcal{R}) = \text{val}(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_0) \geq \text{val}(\mathcal{R}_0) \quad \Rightarrow \quad V(\mathcal{R}) = \emptyset.$

Tout ensemble de contraintes dont le poids double contient une contrainte de $\mathcal{R}_0$.

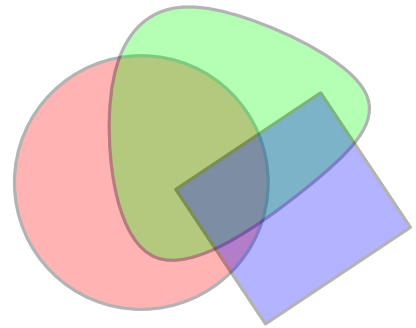
Après k repondérations. : $\quad w(\mathcal{F}) \leq n(1+\alpha)^k \quad$ et $\quad w(\mathcal{R}_0) \gtrsim d 2^{\frac{k}{d}}$.

Pour $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2d}$ on a $1 + \alpha < 2^{\frac{1}{d}} \quad \Rightarrow \quad$ le nombre de passages par 4. possibles est borné.

Pour $r \stackrel{\text{def}}{=} 4d^2$ on a $\mathbb{P}\left[w(V(\mathcal{R})) > \alpha w(\mathcal{F})\right] \leq \frac{1}{2}$. $\quad \longleftarrow$ jolie analyse en moyenne de $V(\mathcal{R})$ via **Helly**. $\quad \square$

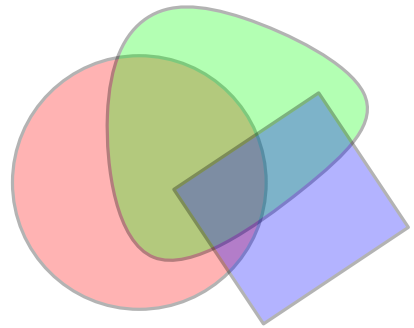
7. Et ensuite ?

Commencé par de la convexité combinatoire.



Commencé par de la convexité combinatoire.

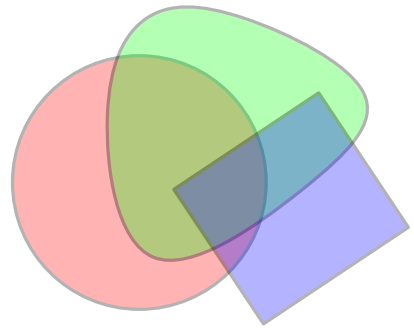
Notions de base, **Carathéodory**, **Radon**, **Helly**.



Commencé par de la convexité combinatoire.

Notions de base, **Carathéodory**, **Radon**, **Helly**.

Point central, **Carathéodory coloré**, **sélection**.

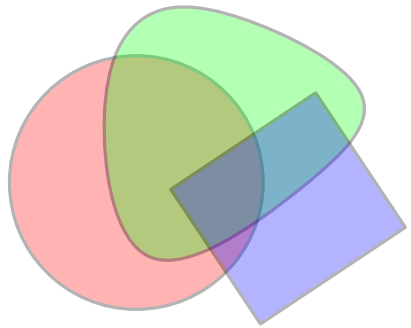


Commencé par de la convexité combinatoire.

Notions de base, **Carathéodory**, **Radon**, **Helly**.

Point central, **Carathéodory coloré**, **sélection**.

Helly fractionnaire, preuve du cas faible.



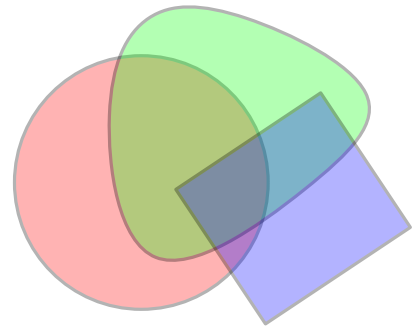
Commencé par de la convexité combinatoire.

Notions de base, **Carathéodory**, **Radon**, **Helly**.

Point central, **Carathéodory coloré**, **sélection**.

Helly fractionnaire, preuve du cas faible.

Test de propriété et **repondération itérée** en PL.



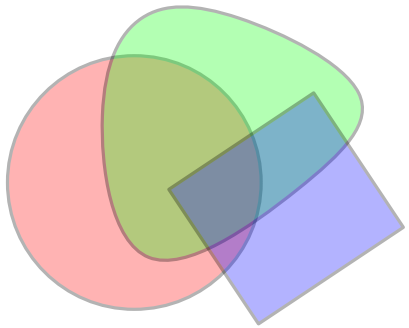
Commencé par de la convexité combinatoire.

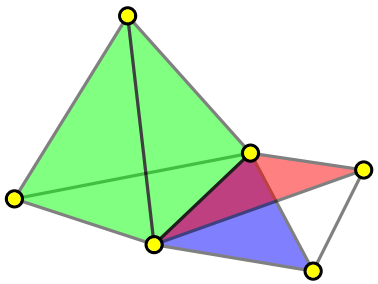
Notions de base, **Carathéodory**, **Radon**, **Helly**.

Point central, **Carathéodory coloré**, **sélection**.

Helly fractionnaire, preuve du cas faible.

Test de propriété et **repondération itérée** en PL.





Puis aller vers des structures mathématiques voisines.

Complexes simpliciaux géométriques, cadre topologique.

Complexes simpliciaux abstraits, f-vecteurs.

Friabilité, borne supérieure, **Helly fractionnaire fort**.

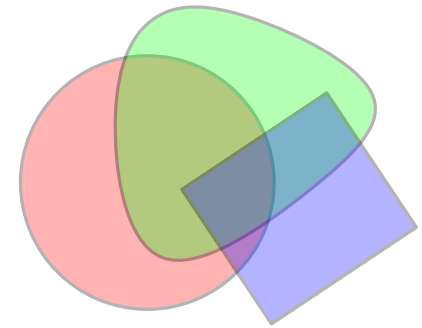
Commencé par de la convexité combinatoire.

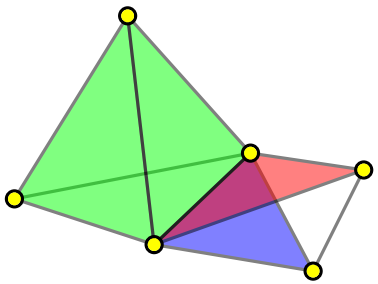
Notions de base, **Carathéodory**, **Radon**, **Helly**.

Point central, **Carathéodory coloré**, **sélection**.

Helly fractionnaire, preuve du cas faible.

Test de propriété et **repondération itérée** en PL.





Puis aller vers des structures mathématiques voisines.

Complexes simpliciaux géométriques, cadre topologique.

Complexes simpliciaux abstraits, f-vecteurs.

Friabilité, borne supérieure, **Helly fractionnaire fort**. $1-(1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$

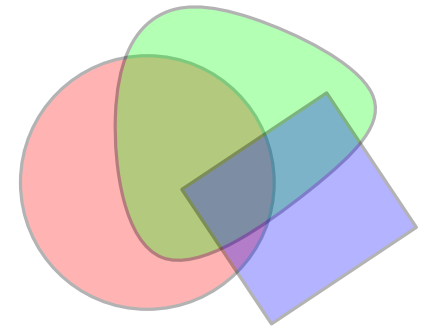
Commencé par de la convexité combinatoire.

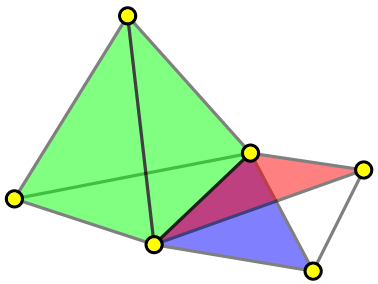
Notions de base, **Carathéodory**, **Radon**, **Helly**.

Point central, **Carathéodory coloré**, **sélection**.

Helly fractionnaire, preuve du cas faible.

Test de propriété et **repondération itérée** en PL.





Puis aller vers des structures mathématiques voisines.

Complexes simpliciaux géométriques, cadre topologique.

Complexes simpliciaux abstraits, f-vecteurs.

Friabilité, borne supérieure, **Helly fractionnaire fort**. $1-(1-\alpha)^{\frac{1}{d+1}}$

RDV : 18 juin à 9h !