Jeux sur les graphes : déplacements de pièces

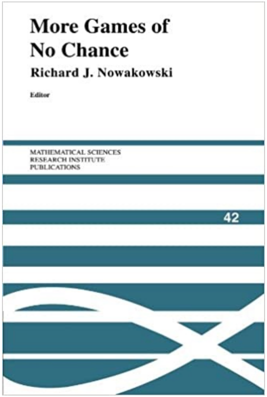
Florian Galliot

14 juin 2020

EJCIM 2020, ~~Bordeaux~~

Description du jeu

- Erik Demaine, Martin Demaine, Helena Verrill : "Coin-Moving Puzzles", *More Games Of No Chance*, 2002.



Description du jeu

- Jeu à 1 joueur.
- Plateau de jeu : un graphe simple non orienté $G = (V, E)$.
- *Configuration* : un ensemble fini $C \subseteq V$ de *pièces*.
- *Mouvement* autorisé : déplacer une pièce d'un sommet occupé v vers un sommet inoccupé qui possède au moins deux sommets voisins occupés autres que v (*2-adjacency restriction rule*).

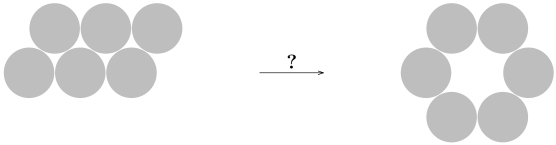
Description du jeu

- Jeu à 1 joueur.
- Plateau de jeu : un graphe simple non orienté $G = (V, E)$.
- *Configuration* : un ensemble fini $C \subseteq V$ de *pièces*.
- *Mouvement* autorisé : déplacer une pièce d'un sommet occupé v vers un sommet inoccupé qui possède au moins deux sommets voisins occupés autres que v (*2-adjacency restriction rule*).
- Notation : on écrit $A \rightarrow B$ lorsqu'il existe une suite de mouvements de A vers B.

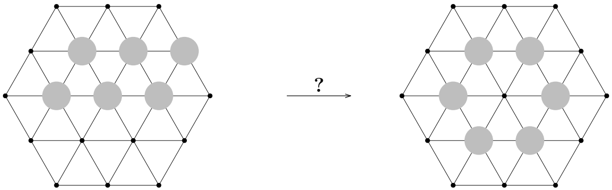
Etant donné un *puzzle* $A \stackrel{?}{\rightarrow} B$ i.e. une configuration de départ A et une configuration objectif B telles que $|A| = |B|$ et $A \neq B$:

- **A-t-on $A \rightarrow B$?**
- Si oui, en combien de mouvements ? (bornes...)

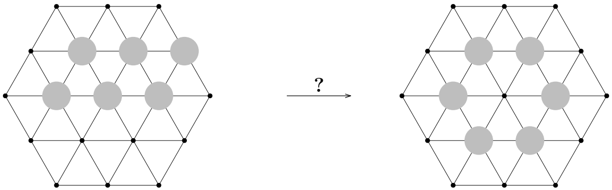
Un premier exemple



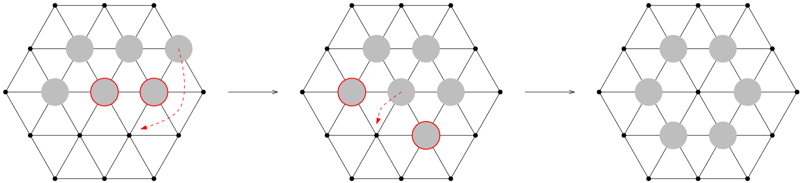
Un premier exemple



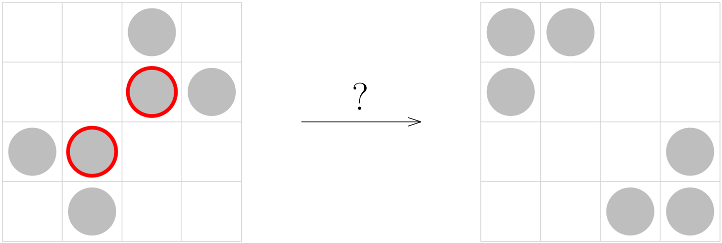
Un premier exemple



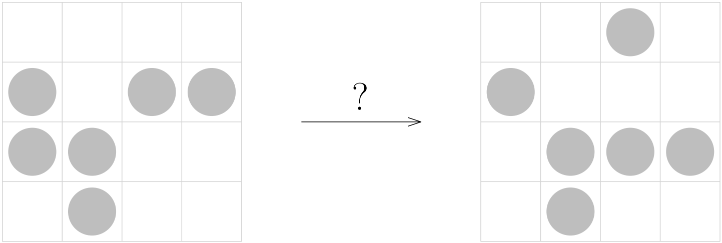
Solution en 2 mouvements :

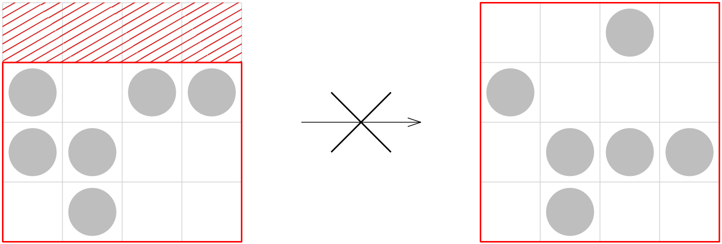


Voisins = haut, bas, gauche, droite.



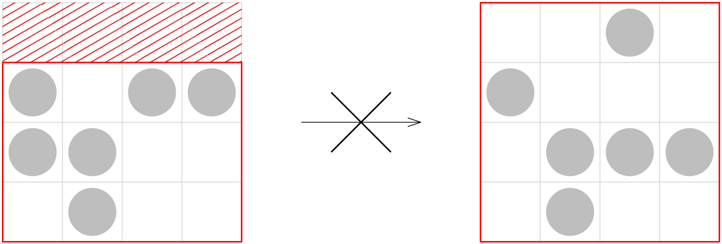
La grille carrée





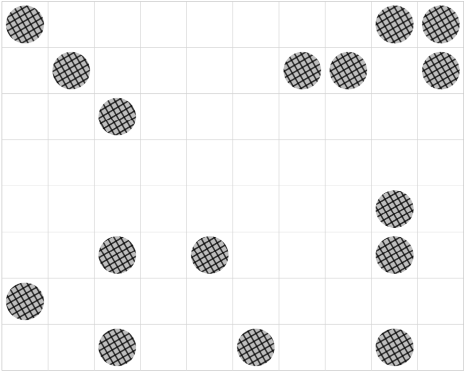
- Certaines positions sont hors d'atteinte à jamais.

La grille carrée



- Certaines positions sont hors d'atteinte à jamais.
- ***Span* d'une configuration** A **:** l'ensemble span(A) des positions que l'on peut espérer atteindre, i.e. que l'on pourrait couvrir en ajoutant des pièces ad libitum sur le plateau à des destinations valides.
- Le span est une union de rectangles à distance au moins 3 les uns des autres.

La grille carrée – Construction du span



$$\text{(hatched disc)} = A$$

$$= \text{span}(A)$$

La grille carrée – Inclusion des spans

- Condition nécessaire de résolubilité :

Proposition

Le span ne peut pas augmenter au cours des mouvements : si $A \rightarrow B$ alors $\mathrm{span}(A) \supseteq \mathrm{span}(B)$.

La grille carrée – Inclusion des spans

- Condition nécessaire de résolubilité :

Proposition

Le span ne peut pas augmenter au cours des mouvements : si $A \to B$ alors $\text{span}(A) \supseteq \text{span}(B)$.

- *Pièces "bonus" (extra coins)* d'un puzzle $A \xrightarrow{?} B$: un ensemble maximum $E \subset A$ tel que $\text{span}(A \setminus E) \supseteq \text{span}(B)$.
- Etant donné un puzzle $A \xrightarrow{?} B$, **combien a-t-on de pièces bonus ?**
  - 0 pièce bonus : le puzzle n'a pas de solution.
  - 1 pièce bonus ? (cas "+1")
  - ≥ 2 pièces bonus ? (cas "+2")

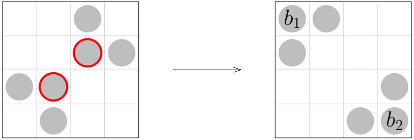
La grille carrée – 2 pièces bonus : condition suffisante

Theorème (Demaine-Demaine-Verrill, 2002)

Supposons qu'il y a au moins 2 pièces bonus et que :

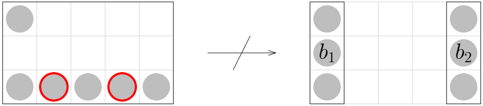
- Chaque composante de span$(A \setminus E)$ contient au plus une composante de span(B). (!)
- Il existe $b_1 \neq b_2$ dans B tels que b_1 a au moins deux voisins dans B et b_2 a au moins deux voisins dans $B \setminus \{b_1\}$.

Alors $A \to B$ en $O(N^3)$ mouvements où $N = |A| = |B|$.



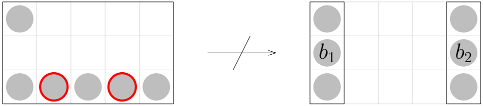
La grille carrée – 2 pièces bonus

Contre-exemple à la version de l'article :



La grille carrée – 2 pièces bonus

Contre-exemple à la version de l'article :



- **Question ouverte : Caractérisation des puzzles résolubles avec au moins 2 pièces bonus. Différent si 3, 4... pièces bonus ?**

La grille carrée – 1 pièce bonus

On se restreint au cadre suivant :

- A et B ont **même span** qui est un unique rectangle R.
- A (donc B aussi) est *minimum+1* i.e. consiste d'une configuration minimum + 1 pièce bonus.

Définition : Une configuration M avec span R est dite *minimum* lorsque toute configuration ayant pour span R possède au moins $|M|$ pièces.

Problème du virus

- Dans un rectangle R, certaines cases sont initialement contaminées par un virus.
- A chaque pas de temps, toute case non contaminée possédant au moins deux cases voisines contaminées est infectée à son tour.
- **Combien de cases initialement contaminées faut-il au minimum pour contaminer tout le rectangle ?**

Problème du virus

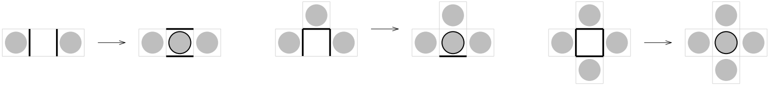
- Dans un rectangle R, certaines cases sont initialement contaminées par un virus.
- A chaque pas de temps, toute case non contaminée possédant au moins deux cases voisines contaminées est infectée à son tour.
- **Combien de cases initialement contaminées faut-il au minimum pour contaminer tout le rectangle ?**

- La réponse = Le cardinal des configurations minimum avec span R.

Problème du virus

- Dans un rectangle R, certaines cases sont initialement contaminées par un virus.
- A chaque pas de temps, toute case non contaminée possédant au moins deux cases voisines contaminées est infectée à son tour.
- **Combien de cases initialement contaminées faut-il au minimum pour contaminer tout le rectangle ?**

- La réponse = Le cardinal des configurations minimum avec span R.



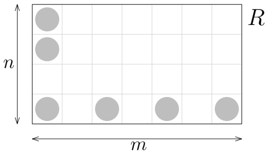
Notons m et n la longueur des côtés de R.

Proposition

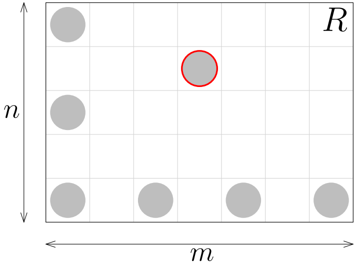
- Le périmètre de la zone infectée diminue (au sens large) au cours de la contagion. Si M a pour span R alors :

$$4|M| \geq \text{Perim}(M) \geq \text{Perim}(R) = 2(m+n).$$

- Les configurations minimum avec span R ont pour cardinal $\lceil \frac{m+n}{2} \rceil$.

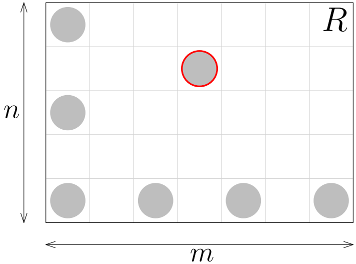


$\text{Perim}(M) = \text{Perim}(R)$: perte de périmètre $\Longrightarrow$ perte de span !



La grille carrée – Minimum+1 : cas $m + n$ pair

$\text{Perim}(M) = \text{Perim}(R)$: perte de périmètre $\implies$ perte de span !



Proposition

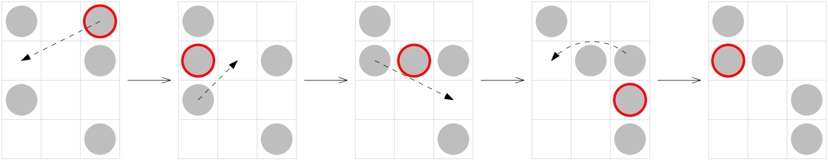
Si $m + n$ est pair, alors $A \to B$ si et seulement si $A \to B$ en 1 mouvement.

La grille carrée – Minimum+1 : cas $m + n$ impair

$\text{Perim}(M) = \text{Perim}(R) + 2$: légère marge...

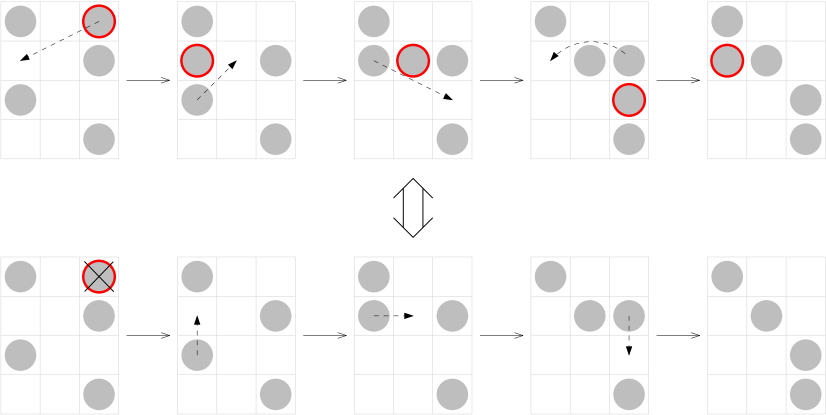
La grille carrée – Minimum+1 : cas $m+n$ impair

$\mathrm{Perim}(M) = \mathrm{Perim}(R) + 2$: légère marge... mais la pièce qu'on déplace doit être voisine de celle qu'on vient de bouger.



La grille carrée – Minimum+1 : cas $m+n$ impair

$\text{Perim}(M) = \text{Perim}(R) + 2$: légère marge... mais la pièce qu'on déplace doit être voisine de celle qu'on vient de bouger.



La grille carrée – Minimum+1 : cas $m+n$ impair

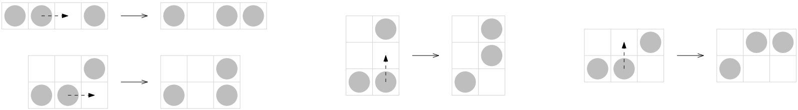
Proposition

Si $m+n$ est impair, alors le cas minimum+1 avec spans égaux admet une réduction polynomiale au jeu suivant.

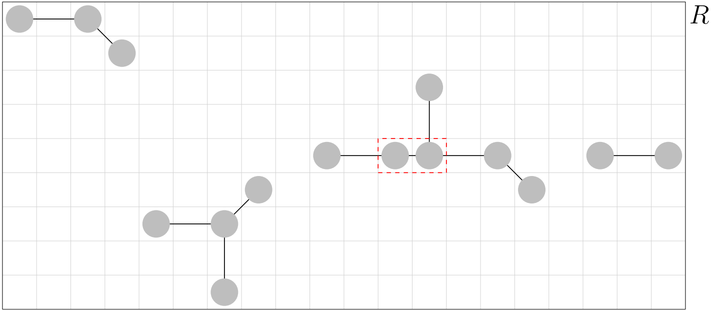
Pushing game

- Joué sur les configurations minimum où toutes les pièces sont isolées excepté **une unique paire de pièces collées**.
- Mouvement autorisé = *push* : pousser une des deux pièces collées, d'une case, contre une troisième pièce.

On note $M \xrightarrow{\mathscr{P}} M'$ s'il existe une suite de pushes de M à M'.



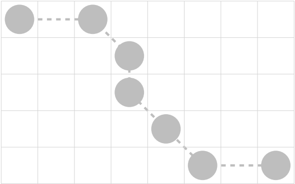
Configuration minimum contenant une paire de pièces collées = "forêt".



La grille carrée – Minimum+1 : cas des chemins

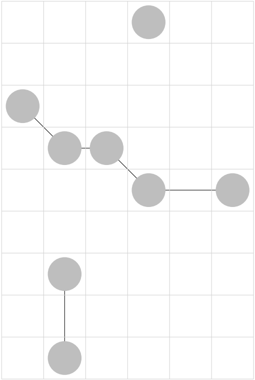
Proposition

Si M est un chemin, alors $M \xrightarrow{\mathscr{P}} M'$ (en $O(|M|^2)$ pushes) si et seulement si M' est également un chemin entre les mêmes extrémités.



La grille carrée – Minimum+1 : cas général

En général : on observe une succession de telles transformations de chemins entre certaines paires de pièces immuables.



La grille carrée – Minimum+1 : cas général

Ce qu'on sait du *pushing game* :

- M est un chemin : CNS vérifiable en temps polynomial.
- M est un arbre : CNS vérifiable en temps polynomial.
- M est une forêt : condition nécessaire (invariant) vérifiable en temps polynomial + conjecture pour une CNS.

La grille carrée – Minimum+1 : cas général

Ce qu'on sait du *pushing game* :

- M est un chemin : CNS vérifiable en temps polynomial.
- M est un arbre : CNS vérifiable en temps polynomial.
- M est une forêt : condition nécessaire (invariant) vérifiable en temps polynomial + conjecture pour une CNS.

Beaucoup de problèmes ouverts :

- $+2 \rightarrow$ Pas entièrement résolu.
- Minimum+1 $\rightarrow$ Cas des forêts + Cas $\text{span}(A) \neq \text{span}(B)$.
- Minimal+1 $\rightarrow$ Tout est à faire !

Merci pour votre attention !

Pour s'amuser :

- https ://coinsliding.erikdemaine.org/
- "Coin Sliding Font Puzzles" (appli Android)